



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Representaciones lineales de los grupos de permutaciones

Autor/es

LORENA IRIARTE CASTRO

Director/es

JOSÉ MARÍA PÉREZ IZQUIERDO

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20



Representaciones lineales de los grupos de permutaciones, de LORENA
IRIARTE CASTRO

(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los
titulares del copyright.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Representaciones lineales de los grupos de permutaciones

Realizado por:

Lorena Iriarte Castro

Tutelado por:

José María Pérez Izquierdo

Logroño, julio de 2020

Resumen

El principal objetivo de la Teoría de Representaciones de grupos finitos es la descripción y clasificación de las distintas representaciones de un grupo finito G . Lo primero en lo que nos centraremos será en la noción de representación lineal de un grupo y también veremos el teorema de Maschke. A continuación, nos adentraremos en la teoría de caracteres y comprobaremos que si dos representaciones son isomorfas, entonces los caracteres son iguales y viceversa. También veremos algún resultado de ortogonalidad y lo que conoceremos como tabla de caracteres. Una vez visto todo esto, nos centraremos en el grupo simétrico. Conoceremos el concepto de diagrama de Young, el cual será importante para la construcción de las representaciones irreducibles del grupo simétrico que realicemos, y veremos definiciones como las de λ -tabloide y módulos de Specht entre otras.

Abstract

The main objective of the Representation Theory of finite groups is to describe and classify the different representations of a finite group G . Firstly, we will focus on the notion of linear representation of a group and we will also see Maschke's theorem. Next, we will study in depth the Character theory and we will check that if two representations are isomorphic, then the characters are equal and vice versa. We will also see some orthogonality results and we will know it as a character table. After seeing it all, we will direct our attention to the symmetric group. We will know the concept of the Young diagram, which will be relevant for the construction of irreducible representations of symmetric group that we carry out, and we will see definitions such as λ -tabloid and Specht modules among others.

Índice general

Índice general	5
1 Representaciones	13
1.1. Representaciones	13
1.2. Caracteres de grupos finitos	17
1.3. Ejemplo	22
2 Representaciones del grupo simétrico	27
2.1. El grupo simétrico	27
2.2. Diagramas de Young	28
2.3. Módulos de Specht	31
2.4. Caracteres del grupo simétrico	41
Conclusiones	51
Bibliografía	53

Introducción

Las referencias históricas que aparecen en este apartado pueden encontrarse en [1, 2, 3].

Grupos

Hasta finales del siglo XVIII el cometido del Álgebra fue en gran parte el estudio de las raíces de los polinomios. Sin embargo, durante el siglo XX el Álgebra se ha encargado fundamentalmente del estudio de sistemas axiomáticos abstractos. La transición entre estas dos concepciones tan diferentes ocurrió en el siglo XIX, donde conjuntamente con la teoría de grupos se desarrolló el estudio de anillos conmutativos, cuerpos y anillos no conmutativos, siendo Évariste Galois uno de matemáticos pioneros que divisó, con su tratamiento de las raíces de polinomios mediante cuerpos y grupos, el nuevo rumbo que habría de tomarse.

El desarrollo del concepto de grupo durante el siglo XIX es un ejemplo de cuan lentamente el álgebra abstracta fue abriéndose camino inicialmente hasta su aceptación universal. Todo comenzó posiblemente en 1770 cuando Lagrange escribió su tratado *Reflexions sur la résolution algébrique des équations*. En ella Lagrange observó que algunos de los métodos usados hasta aquel entonces para encontrar raíces de polinomios tenían en común que se apoyaban en un polinomio auxiliar de menor grado —su resolvente. Para el polinomio $f(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ con raíces genéricas x_1, \dots, x_n se consideraba una función $R(x_1, \dots, x_n)$ y todas sus imágenes distintas y_1, \dots, y_k obtenidas al permutar x_1, \dots, x_n , es decir, las distintas $R(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ formando el polinomio auxiliar $(x - y_1) \cdots (x - y_k)$. Encontrar y_1, \dots, y_k permitía hallar x_1, \dots, x_n en términos de los coeficientes de $f(x)$. En general, Lagrange observó que k divide a $n!$ —primera versión de lo que hoy conocemos como Teorema de Lagrange— siendo $k = 3$ para $n = 4$. Así, la resolución de la cúbica permitía resolver la cuártica. Sin embargo, para $n = 5$ Lagrange observó que $k = 6$, postulando que el tratamiento conocido del estudio de raíces de polinomios no serviría, en general, para polinomios de grado ≥ 5 .

Aunque Lagrange no pudo concluir el problema de la resolución de polinomios mediante radicales, era la primera vez que se usaba el grupo simétrico para estudiar las raíces de polinomios y que aparecía un pensamiento claro del

papel que podían jugar los grupos. Su tratado fue fundamental para el trabajo posterior de Ruffini, Abel y finalmente el de Galois, donde ya se pueden encontrar muchos resultados auxiliares acerca del grupo simétrico, sus subgrupos y sus elementos en el tratamiento de las raíces de polinomios.

Fue Galois el primero en usar el término “grupo” y lo hizo como sinónimo de conjunto de permutaciones cerrado por multiplicaciones. Pero aunque Galois desarrolló su trabajo en el entorno de 1830, no sería hasta 1846 que Liouville finalmente pudo publicarlo. En ese momento no parecía haber ningún motivo que justificase una definición más abstracta que la usada por Galois. Ni siguiera el trabajo fundamental de Cauchy *Exercices d'analyse et de physique mathématique* de 1844 donde los grupos de permutaciones son estudiados *per se* y donde aparecen por ejemplo la descomposición en ciclos, el concepto de orden de una permutación, la existencia de permutaciones de orden primo en ciertos subgroups, etc., parecía beneficiarse de una noción abstracta de grupo. Aun así, en 1854 Arthur Cayley en un artículo titulado *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$* dio la primera definición de grupo abstracto: *un conjunto de símbolos $1, \alpha, \beta$ todos diferentes y tal que el producto de dos de ellos (no importa en qué orden) o el producto de uno de ellos por él mismo pertenece al conjunto. Estos símbolos no son en general conmutativos pero sí asociativos. Si el grupo entero es multiplicado por cualquiera de los símbolos a izquierda o derecha, el efecto es simplemente reproducir el grupo.*

Cayley demuestra que cualquier grupo finito abstracto es isomorfo a un grupo de permutaciones en el sentido de Galois, por lo que nada parece ganarse y su trabajo queda relegado. Sin embargo más y más resultados seguían apareciendo, como la monografía de Camille Jordan *Traité des substitutions et des Équations Algébriques* en 1870, donde por ejemplo se introduce el concepto de serie de composición, o también los famosos teoremas de Sylow en 1872 inicialmente formulados para grupos de permutaciones. Por otro lado, al final de la década de 1860 Felix Klein y Sophus Lie habían decidido “investigar objetos geométricos o analíticos que son transformados en ellos mismos mediante grupos de cambios”. Mientras que Klein se centra en grupos finitos, Lie lo hace en grupos de transformaciones continuas. El interés tanto en grupos de permutaciones como en grupos de transformaciones continuas contribuyó quizás a un ambiente más receptivo para el concepto abstracto de grupo, que en las décadas de 1880 y 1890 por fin se diseminó muy rápidamente.

Aunque hoy en día en los grados en Matemáticas se distingue muy claramente entre un grupo abstracto G , sus acciones en conjuntos (G visto como grupo de permutaciones), sus representaciones lineales (G visto como grupo de transformaciones lineales) y, si es caso, la acción de G en variedades topológicas (G visto como grupo de transformaciones continuas), durante el siglo XIX muchos de nuestros antepasados matemáticos tuvieron que realizar un importante esfuerzo para allanarnos el camino.

Caracteres y representaciones

Cualquier profesor de álgebra nos dirá que dado un grupo G y un F -espacio vectorial V de dimensión finita, una *representación lineal* de G en V es un homomorfismo de grupos $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$. El *carácter* χ_V asociado a esta representación es la función $\chi: G \rightarrow F$ dada por $\chi_V(g) := \text{traza}(\rho_g)$. Pues esto no ha sido siempre tan sencillo, ni siquiera a las puertas del siglo XX.

El término *carácter* lo introdujo Gauss en sus *Disquisitiones Arithmeticae* de 1801 en relación con la clasificación de formas cuadráticas. Para un grupo abeliano A , un carácter¹ es un homomorfismo $\chi: A \rightarrow \mathbb{C}^\times$ entre A y el grupo multiplicativo de números complejos no nulos. Quizás, uno de los primeros ejemplos de caracteres de grupos es el *símbolo de Legendre*, el cual fijado un primo p le hace corresponder

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ es un cuadrado módulo } p \\ -1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a cualquier número a primo con p . En una carta de Dedekind a Frobenius del 18 de julio de 1896, Dedekind cita la resolvente de Lagrange como el ejemplo más antiguo de aplicación de caracteres de grupos abelianos.

En otra carta del 25 de marzo de 1896 Dedekind le comentó a Frobenius la siguiente observación. Si se parte de un grupo finito G , cuyos elementos se han ordenado, e indeterminadas $\{x_g \mid g \in G\}$ y se calcula el determinante de la matriz $(x_{gh^{-1}})_{g,h \in G}$ resulta que, si G es abeliano, este determinante, llamado *determinante del grupo*, se factoriza como producto de factores lineales de la forma

$$\sum_{g \in G} \chi(g) x_g$$

uno para cada carácter χ del grupo abeliano G . Dedekind le hace notar a Frobenius que para grupos no abelianos pueden aparecer factores irreducibles no lineales aunque solamente dispone de ejemplos particulares (el grupo simétrico de grado 3 y el grupo cuaternio). Por ejemplo, para $G = C_3 = \{e, a, a^2\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_e & x_{a^2} & x_a \\ x_a & x_e & x_{a^2} \\ x_{a^2} & x_a & x_e \end{vmatrix} &= x_e^3 + x_a^3 + x_{a^2}^3 - 3x_e x_a x_{a^2} \\ &= (x_e + x_a + x_{a^2})(x_e + \zeta x_a + \zeta^2 x_{a^2})(x_e + \zeta^2 x_a + \zeta x_{a^2}) \end{aligned}$$

¹Si V es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión 1 entonces un homomorfismo $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ es lo mismo que un homomorfismo $G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ y este concepto de carácter se corresponde con el de carácter asociado a representaciones de dimensión 1 sobre \mathbb{C} .

donde $\zeta = e^{2\pi/3}$ y efectivamente

$$\begin{array}{lll} e \mapsto 1 & e \mapsto 1 & e \mapsto 1 \\ a \mapsto 1 & a \mapsto \zeta & a \mapsto \zeta^2 \\ a^2 \mapsto 1 & a^2 \mapsto \zeta^2 & a^2 \mapsto \zeta \end{array}$$

son los tres caracteres del grupo cíclico C_3 . Frobenius encontró ese mismo año la factorización del determinante de grupos arbitrarios, para lo cual generalizó la noción de carácter de grupos abelianos a grupos no abelianos.

Describiremos brevemente el concepto de carácter tal y como lo formuló Frobenius, no por su utilidad sino para que se comprenda lo lejos que queda, aún siendo equivalente, de la definición comúnmente usada hoy en día. Sean C_1, \dots, C_n las distintas clases de conjugación² de G y h_i el tamaño de C_i . El conjunto de los elementos inversos de los de C_i es también una clase de conjugación, digamos $C_{i'}$. Para cada $\{i, j, k\}$, Frobenius consideró el número h_{ijk} de soluciones de

$$abc = 1 \quad \text{con } a \in C_i, b \in C_j, c \in C_k$$

y

$$a_{ijk} := \frac{1}{h_i} h_{i'jk}$$

demostrando que

$$a_{ijk} = a_{ikj} \quad \text{y} \quad \sum_j a_{ijk} a_{jpq} = \sum_j a_{ijq} a_{jpk}$$

y que el determinante $|c_{kl}|$, donde $c_{kl} = \sum_{i,j} a_{ijk} a_{jil}$, no era nulo. A partir de ello pudo deducir que existen n soluciones diferentes (r_{q1}, \dots, r_{qn}) de las ecuaciones

$$r_{qj} r_{qk} = \sum_i a_{ijk} r_{qk}$$

tales que el determinante $|r_{qi}|$ no es nulo. Para cada solución consideró una tupla de números complejos $\chi^{(q)} = (\chi_1^{(q)}, \dots, \chi_n^{(q)})$ de modo que

$$r_{qi} = \frac{h_i \chi_i^{(q)}}{f^{(q)}}$$

donde $f^{(q)}$ era un cierto número. Es a cada una de esas tuplas a lo que Frobenius llamó carácter de G y los usó para encontrar mediante argumentos muy complejos la factorización del determinante del grupo G .

²En un grupo G , dos elementos $a, b \in G$ son *conjugados* si existe $g \in G$ tal que $b = gag^{-1}$. Una *clase de conjugación* de G es el conjunto formado por un elemento y todos sus conjugados.

Actualmente la matriz $(\chi_j^{(i)})_{i,j}$ se conoce como *tabla de caracteres* del grupo G y, afortunadamente, no se define así sino, en términos de representaciones, como la tabla formada a partir de los caracteres de las representaciones irreducibles de G .

Por muy sorprendente que pueda resultar hoy en día, el concepto de carácter fue anterior al de representación ya que el concepto de *representación* lo introdujo Frobenius en 1897, asociando a cada elemento $a \in G$ una matriz $A(a)$ de modo que para cualesquiera $a, b \in G$, ab tuviese asignada $A(a)A(b)$. Habría que esperar a la década de 1920 a H. Weyl y E. Noether para ver a los grupos representados por aplicaciones lineales de espacios vectoriales y no por matrices. Ni siquiera matemáticos de la talla de Burnside, Schur o Maschke, quienes contribuyeron profundamente a asentar la teoría de representaciones, dieron ese salto. En cualquier caso, Frobenius vislumbró claramente que las representaciones y caracteres tendrían gran interés en el futuro estudio de grupos, aunque siguió usando sus resultados acerca de la factorización del determinante del grupo como argumento en sus demostraciones con la idea de que cada factor irreducible de este determinante se correspondía con una representación irreducible. También en 1897 fue cuando Frobenius observó que parte de su trabajo se solapaba con el de T. Molien acerca de la estructura de álgebras asociativas y, en particular, del álgebra grupo.

Burnside y más tarde Schur consideraron reformular el trabajo de Frobenius, ya que los caracteres se mostraban muy útiles para obtener nuevos resultados acerca de la estructura de los grupos, siendo el tratamiento de Schur de 1905 más sencillo. Se evitó así la dependencia de los argumentos en la factorización del determinante del grupo, y es por ello que hoy en día no suele haber referencias a ese tema en los cursos dedicados a representaciones. Schur partió de la definición del carácter de una representación como la traza de la matriz asociada a cada elemento y demostró, apoyándose en un importante resultado de Maschke de 1899 que establecía que toda representación compleja de G es suma directa de representaciones irreducibles, que dos representaciones son isomorfas si y solamente si tienen el mismo carácter. Así, los caracteres que con tanto esfuerzo construyó Frobenius son una herramienta fundamental en el estudio de representaciones.

Objetivo

El objetivo de este trabajo fin de grado es la descripción de las representaciones lineales de los grupos de permutaciones. Para ello primero se expondrán los resultados fundamentales de las representaciones lineales de los grupos finitos y en especial de los caracteres de las mismas. Una vez obtenidos los resultados básicos que necesitaremos se abordará el caso particular de los grupos de permutaciones. La aproximación a la descripción de las representaciones

irreducibles de los grupos de permutaciones es a aproximación combinatoria tradicional basada en diagramas de Young.

En general, a lo largo del trabajo G denotará un grupo, S_n será el grupo simétrico de grado n , F será un cuerpo y la letra ρ se reservará para denotar representaciones. Estos datos a veces se especificarán en los enunciados o se sobreentenderán.

Capítulo 1

Representaciones lineales de grupos finitos

Para la elaboración de este capítulo se ha seguido el excelente libro de J-P. Serre [5] evitando el restringirnos solamente a $F = \mathbb{C}$.

1.1. Representaciones

El objetivo de este capítulo es describir la noción de representación lineal de un grupo, así como ver que en cualquier representación lineal de dimensión finita de un grupo de orden finito, cuya característica no divide al orden del grupo, el módulo se descompone como suma de irreducibles. Pero antes de ello, vamos a introducir algunas definiciones previas.

Definición 1.1.1 *Un **álgebra** (asociativa y unitaria) sobre un cuerpo F (o simplemente F -álgebra o álgebra) es un F -espacio vectorial A con un producto $(a, b) \mapsto ab$ y un elemento destacado 1 tal que se cumple:*

$$\begin{aligned} \text{Bilinealidad:} \quad & (a + a')b = ab + a'b, \quad a(b + b') = ab + ab' \\ & (\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b) \\ \text{Asociatividad:} \quad & a(bc) = (ab)c \\ \text{Elemento identidad:} \quad & 1a = a = a1 \end{aligned}$$

para cualesquiera $a, b, c \in A$ y $\alpha \in F$. Un **homomorfismo** entre dos F -álgebras A y B es una aplicación lineal $\varphi: A \rightarrow B$ tal que $\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$ para cualesquiera $a, a' \in A$.

Uno de los ejemplos más naturales de F -álgebra es, dado un F -espacio vectorial V , el espacio vectorial $\text{End}(V)$ de aplicaciones lineales de V en V donde el producto es la composición.

Definición 1.1.2 *Dado un grupo G y un cuerpo F se define el **álgebra grupo** de G con coeficientes en F como el F -espacio vectorial $F[G]$ que tiene como*

base los elementos de G y el producto queda determinado por la bilinealidad y el producto en G .

Definición 1.1.3 Dada una F -álgebra A , un A -**módulo** a izquierda unitario (o simplemente A -módulo) es un F -espacio vectorial M dotado de una operación externa $A \times M \rightarrow M$, $(a, x) \mapsto ax$ de modo que se cumple

$$\begin{aligned} \text{Bilinealidad:} \quad & (a + a')x = ax + a'x, \quad a(x + x') = ax + ax' \\ & (\alpha a)x = \alpha(ax) = a(\alpha x) \end{aligned}$$

$$\text{Asociatividad:} \quad a(bx) = (ab)x$$

$$\text{Elemento identidad:} \quad 1x = x$$

para cualesquiera $a, a', b \in A$ y $x, x' \in M$. Una **representación** (a izquierda unitaria) de una A -álgebra es un homomorfismo (de álgebras) $\rho: A \rightarrow \text{End}(V)$ para algún espacio vectorial V que además cumple que $\rho(1) = \text{Id.}$

Un A -módulo M determina una representación $\rho: A \rightarrow \text{End}(M)$ mediante $\rho_a(x) := ax$. Recíprocamente, una representación $\rho: A \rightarrow \text{End}(V)$ determina una estructura de A -módulo en V mediante $ax := \rho_a(x)$. Así, módulos y representaciones son lo mismo y a menudo nos referiremos a un módulo V como una representación.

Definición 1.1.4 Un **submódulo** N de un A -módulo M es un subespacio vectorial $N \leq M$ tal que $AN := \{ax \mid a \in A, x \in N\} \subseteq N$. Un submódulo es un módulo con las operaciones heredadas. El espacio vectorial $\{0\}$ es un módulo para cualquier álgebra y se denomina **módulo trivial**. Un **submódulo propio** de un A -módulo M es cualquier submódulo $N \leq M$ distinto de M . Un A -módulo M no trivial se dice que es **irreducible** si no posee submódulos propios no triviales. Un módulo se llama **completamente reducible** si es o bien trivial o suma directa de submódulos irreducibles.

Ejemplo 1.1.1 El álgebra A es un A -módulo con su producto. Sus submódulos son sus ideales a izquierda. Esta representación se llama **representación regular**.

Definición 1.1.5 Un **homomorfismo** entre dos A -módulos M y M' es una aplicación lineal $\varphi: M \rightarrow M'$ tal que $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ para cualesquiera $a \in A$ y $x \in M$. Si el homomorfismo es biyectivo entonces se llama **isomorfismo**. El **núcleo** de un homomorfismo φ se define como $\ker \varphi := \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\}$ y es siempre un submódulo de M .

Definición 1.1.6 Dado un grupo G , llamaremos **representaciones lineales** de G con coeficientes en el cuerpo F a las representaciones de su álgebra grupo $F[G]$, o equivalentemente a los $F[G]$ -módulos. Una representaci3n lineal de G es, esencialmente, lo mismo que un homomorfismo de grupos $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$, donde $\text{GL}(V)$ denota el grupo de las transformaciones lineales biyectivas del F -espacio vectorial V .

Teorema 1.1.1 (Teorema de Maschke) *Sea G un grupo finito y F un cuerpo cuya característica no divide al orden de G . Se tiene que cualquier representación lineal de G con coeficientes en F de dimensión finita es completamente reducible.*

Demostración. Lo que vamos a demostrar es que para cualquier $F[G]$ -módulo V y para cualquier submódulo $W \leq V$ existe otro submódulo $W' \leq V$ de modo que $V = W \oplus W'$. Esto implica inmediatamente el resultado ya que, fijado un $F[G]$ -módulo V de dimensión finita, o bien V es trivial o bien V posee algún submódulo irreducible W_1 . En el segundo caso descomponemos $V = W_1 \oplus W'_1$, obteniendo un sumando irreducible de V . Basta repetir argumento con W'_1 y tendremos $V = W_1 \oplus (W_2 \oplus W'_2)$ con W_1, W_2 irreducibles. Reiterando se llega a que V es completamente reducible.

Para encontrar la descomposición $V = W \oplus W'$ primero expresamos V como $V = W \oplus S$ para algún subespacio S , consideramos la proyección de V sobre W paralela a S

$$\begin{aligned}\pi': V &\longrightarrow W \subseteq V \\ w + s &\longmapsto w\end{aligned}$$

y la rectificamos. Definimos

$$\begin{aligned}\pi: V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \pi(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} \pi'(hv)\end{aligned}$$

que está bien definida porque la característica de F no divide orden del grupo, es decir, $|G|$ es un elemento no nulo de F .

Veamos que π es homomorfismo de módulos. Dados $v \in V, g \in G$

$$\begin{aligned}\pi(gv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} \pi'(hgv) = \frac{1}{|G|} \sum_{h_1 \in G} gh_1^{-1} \pi'(h_1v) \\ &= g \frac{1}{|G|} \sum_{h_1 \in G} h_1^{-1} \pi'(h_1v) = g\pi(v)\end{aligned}$$

Por tanto, π es un homomorfismo de módulos y su núcleo $\ker \pi$ es un submódulo de V .

Veamos ahora que π es una proyección sobre W . En primer lugar, dado $v \in V$, $\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} \pi(hv) \in W$ ya que $\pi'(V) = W$. Por otro lado, dado $w \in W$

$$\pi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} \pi(hw) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} hw = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} w = \frac{1}{|G|} |G| w = w.$$

Veamos ahora que $V = W \oplus \ker \pi$. En efecto, si $w \in W \cap \ker \pi$ entonces $w = \pi(w) = 0$, así que $W \cap \ker \pi = \{0\}$. Además, dado $v \in V$, $v = \pi(v) + (v - \pi(v))$

con $\pi(v) \in W$ y $\pi(v - \pi(v)) = \pi(v) - \pi(\pi(v)) = \pi(v) - \pi(v) = 0$, pues $\pi(v) \in W$ queda fijo por π . Esto muestra que $v \in W + \ker \pi$, y por lo tanto $V = W \oplus \ker \pi$. ■

Nota 1.1.1 *Observar que en la demostración del teorema hemos probado que si W es un submódulo de V entonces existe un submódulo W' tal que $V = W \oplus W'$.*

La técnica empleada en la demostración del Teorema de Maschke ha sido el promediar una aplicación lineal. Podemos aprovechar más esta técnica.

Teorema 1.1.2 (Lema de Schur) *Sean M, M' dos $F[G]$ -módulos irreducibles y $\varphi: M \rightarrow M'$ un homomorfismo:*

1. *O bien φ es nulo o bien es un isomorfismo.*
2. *Si $M' = M$ tiene dimensión finita y F es algebraicamente cerrado entonces $\varphi = \alpha \text{Id}_M$ para algún $\alpha \in F$.*

Demostración. Como $\ker \varphi$ es un submódulo entonces o bien $\ker \varphi = \{0\}$ (y φ es inyectiva) o bien $\ker \varphi = M$ (y φ es nula). De igual modo, como $\varphi(M)$ es un submódulo de M' o bien $\varphi(M) = M'$ (y φ es suprayectiva) o bien $\varphi(M) = \{0\}$ (y φ es nula). Esto demuestra el primer apartado. En cuanto al segundo, como F es algebraicamente cerrado, φ tiene algún valor propio α . Ahora, $\{x \in M \mid \varphi(x) = \alpha x\}$ es un submódulo no nulo de M , así que es todo M y $\varphi = \alpha \text{Id}_m$. ■

Corolario 1.1.1 *Dados dos $F[G]$ -módulos irreducibles M y M' con representaciones asociadas ρ, ρ' y una aplicación lineal cualquiera $f: M \rightarrow M'$, su promedio $\tilde{f}(x) := \sum_{h \in G} h f(h^{-1}x)$ cumple:*

1. *Si M y M' no son isomorfos entonces $\tilde{f} = 0$.*
2. *Si $M = M'$, F es algebraicamente cerrado y $\dim M < \infty$ entonces $\tilde{f} = \lambda \text{Id}_M$ donde $\lambda \dim M = |G| \text{traza}(f)$.*

Demostración. Al igual que en la demostración del Teorema de Maschke, \tilde{f} es un homomorfismo de módulos. Por el Lema de Schur es o bien nulo o bien isomorfismo. Si M no es isomorfo a M' entonces $\tilde{f} = 0$. Si $M = M'$ tiene dimensión finita y F es algebraicamente cerrado entonces $\tilde{f} = \lambda \text{Id}_M$. Tomando trazas se tiene $\lambda \dim M = \text{traza}(\sum_{h \in G} \rho_h f \rho_h^{-1}) = \sum_{h \in G} \text{traza}(\rho_h f \rho_h^{-1}) = |G| \text{traza}(f)$. ■

Si fijamos bases de M, M' , denotamos por $R(g), R'(g)$ las matrices coordenadas de $\rho(g)$ y $\rho'(g)$ respectivamente y consideramos una aplicación f arbitraria con matriz coordenada $(\alpha_{ij})_{i,j}$ la aplicación promedio \tilde{f} de f tiene matriz coordenada $(\tilde{\alpha}_{ij})_{i,j}$ donde

$$\tilde{\alpha}_{i,j} = \sum_{h \in G} \sum_{p,q} R'_{ip}(h) \alpha_{pq} R_{qj}(h^{-1})$$

Corolario 1.1.2 1. Si M y M' no son isomorfos entonces

$$\sum_{h \in G} R'_{ip}(h) R_{qj}(h^{-1}) = 0$$

2. Si $M = M'$ de dimensión finita y F es algebraicamente cerrado entonces

$$(\dim M) \sum_{h \in G} R_{ip}(h) R_{qj}(h^{-1}) = \begin{cases} |G| & \text{si } p = q \text{ e } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. En el primer caso, independientemente de f , $\tilde{f} = 0$ por lo que $\sum_{h \in G} \sum_{p,q} R'_{ip}(h) \alpha_{pq} R_{qj}(h^{-1}) = 0$ para todas las elecciones que hagamos de α_{pq} . Basta fijar un $\alpha_{pq} = 1$ y el resto hacerlo nulo para obtener el resultado.

En el segundo caso, al ser \tilde{f} un múltiplo de la identidad, si $i \neq j$ entonces $\tilde{\alpha}_{i,j} = 0$ por lo que como antes $\sum_{h \in G} R_{ip}(h) R_{qj}(h^{-1}) = 0$ en tal caso. Si $i = j$ entonces $(\dim M) \sum_{h \in G} R_{ip}(h) \alpha_{pq} R_{qi}(h^{-1}) = (\dim M) \tilde{\alpha}_{ii} = |G| \text{traza}(f) = |G|(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots)$. Comparando los coeficientes de α_{pq} en ambos lados obtenemos que si $p \neq q$ entonces $(\dim M) \sum_{h \in G} R_{ip}(h) R_{qi}(h^{-1}) = 0$ mientras que $p = q$ entonces $(\dim M) \sum_{h \in G} R_{ip}(h) R_{pi}(h^{-1}) = |G|$. ■

1.2. Caracteres de grupos finitos

El principal objetivo de este capítulo, una vez adentrados en lo que es la teoría de caracteres, será comprobar que dos representaciones tienen el mismo carácter si y sólo si son isomorfas.

Comenzamos con la definición de carácter y algunos lemas y proposiciones sobre ellos.

Definición 1.2.1 El **carácter** asociado una representación lineal de dimensión finita $\rho: F[G] \rightarrow \text{End}(M)$ de un grupo G es la aplicación

$$\begin{aligned} \chi_\rho &:= \chi_M: G \rightarrow F \\ g &\mapsto \chi_\rho(g) := \text{traza}(\rho_g) \end{aligned}$$

El uso de trazas impone la siguiente restricción natural:

En lo que sigue se considerarán sólo representaciones de dimensión finita.

Nota 1.2.1 Los caracteres almacenan mucha información. Por ejemplo, la dimensión de la representación es simplemente el valor que toma el carácter en el elemento neutro $e \in G$.

$$\chi_\rho(e) = \text{traza}(\rho_e) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ e x = x \forall x \in M \Rightarrow \rho_e = \text{Id}_M}}{=} \text{traza}(\text{Id}_M) = \dim M.$$

Proposición 1.2.1 Sean M y M' dos $F[G]$ -módulos isomorfos. En tal caso, $\chi_M = \chi_{M'}$.

Demostración. Sea $\psi : M \rightarrow M'$ un isomorfismo entre los módulos M y M' y denotemos por ρ la representación asociada a M y por ρ' la asociada a M' . Entonces, $\psi(\rho_g(x)) = \rho'_g(\psi(x))$ implica que $\psi\rho_g = \rho'_g\psi$ y así $\rho'_g = \psi\rho_g\psi^{-1}$. Calculando las trazas tenemos que $\chi_{M'}(g) = \text{traza}(\rho'_g) = \text{traza}(\psi\rho_g\psi^{-1}) = \text{traza}(\rho_g) = \chi_M(g)$ ya que la traza del producto de dos matrices no depende del orden en que se multipliquen. ■

Los caracteres se comportan muy bien respecto de las formas usuales de combinar módulos.

Proposición 1.2.2 Sea M un $F[G]$ -módulo y M', M'' submódulos de M . Si $M = M' \oplus M''$ entonces $\chi_M = \chi_{M'} + \chi_{M''}$.

Demostración. Fijamos una base B de M que sea la unión de una B' de M' y otra B'' de M'' . Si ρ, ρ', ρ'' son las representaciones asociadas a M, M' y M'' respectivamente y $R(g)$ es la matriz coordenada de ρ_g respecto de B , $R'(g)$ la de ρ'_g respecto de B' y $R''(g)$ la de ρ''_g respecto de B'' entonces, al ser M' y M'' submódulos

$$R(g) = \left(\begin{array}{c|c} R'(g) & 0 \\ \hline 0 & R''(g) \end{array} \right).$$

Por lo tanto $\chi_M(g) = \text{traza}(R(g)) = \text{traza}(R'(g)) + \text{traza}(R''(g)) = \chi_{M'}(g) + \chi_{M''}(g)$. ■

Proposición 1.2.3 Dados $g, h \in G$ se tiene que $\chi_M(g) = \chi_M(hgh^{-1})$, por lo que los caracteres de G son constantes en las clases de conjugación.

Demostración. Sea ρ la representación asociada a M . Claramente $\chi(hgh^{-1}) = \text{traza}(\rho_{hgh^{-1}}) = \text{traza}(\rho_h\rho_g\rho_h^{-1}) = \text{traza}(\rho_g) = \chi_M(g)$ ya que la traza de un producto de matrices no depende del orden en que se multipliquen. ■

Definición 1.2.2 Una **función de clase** $f: G \rightarrow F$ es una función que cumple $f(hgh^{-1}) = f(g)$ para cualesquiera $g, h \in G$. Las funciones de clase forman un espacio vectorial de dimensión igual al número de clases de conjugación de G .

En las funciones de clase se puede considerar la forma bilineal simétrica

$$[f_1, f_2] := \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}).$$

pero para que esté bien definida conviene asumir la siguiente hipótesis, que ya quedará implícita en todos los enunciados, aunque no se mencione explícitamente:

En lo que sigue siempre asumiremos que $\text{car } F$ no divide a $|G|$.

Teorema 1.2.1 (Primera relación de ortogonalidad)

1. Si W es una representación irreducible y F es algebraicamente cerrado entonces $[\chi_W, \chi_W] = 1$.
2. Si W y W' son representaciones irreducibles no isomorfas entre sí entonces $[\chi_W, \chi_{W'}] = 0$.

Demostración. Consideramos la matriz coordenada $R(g)$ de ρ_g para la representación ρ asociada a W . Sabemos que

$$\begin{aligned} [\chi_W, \chi_W] &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{i,j} R(h)_{ii} R_{jj}(h^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_i R(h)_{ii} R(h^{-1})_{ii} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_i \frac{|G|}{\dim W} = 1. \end{aligned}$$

En caso de que W y W' no sean isomorfas,

$$[\chi_W, \chi_{W'}] = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{i,j} R'(h)_{ii} R_{jj}(h^{-1}) = 0$$

■

Para poder garantizar siempre la ortonormalidad de los caracteres de representaciones irreducibles es natural la siguiente hipótesis:

En lo que sigue siempre asumiremos que F sea algebraicamente cerrado.

Teorema 1.2.2 *Sea M una representación lineal de G con carácter χ_M . Si $M = W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$ como suma de representaciones irreducibles el número de sumandos que son isomorfos a una representación irreducible W dada es $[\chi_M, \chi_W]$. En particular, ese número es independiente de la descomposición de M elegida.*

Demostración. $[\chi_M, \chi_W] = [\chi_{W_1}, \chi_W] + \cdots + [\chi_{W_l}, \chi_W]$ y cada sumando $[\chi_{W_i}, \chi_W]$ es 0 si W_i no es isomorfo a W o 1 en caso contrario. Por tanto $[\chi_M, \chi_W]$ cuenta el número de sumandos isomorfos a W . ■

Corolario 1.2.1 *Dos representaciones son isomorfas si y solamente si sus caracteres son iguales.*

Demostración. Ya hemos comprobado que en caso de ser isomorfas los caracteres son iguales. Asumamos que los caracteres son iguales. En tal caso en cualquier descomposición el número de veces que aparece, salvo isomorfismo,

un cierto módulo irreducible W es el mismo, por lo que los dos módulos tienen, salvo isomorfismo, la misma descomposición en módulos irreducibles, y por tanto son isomorfos. ■

Si $M \cong m_1 W_1 \oplus \cdots \oplus m_k W_k$ donde $m_i W_i$ indica que en la descomposición de M aparecen m_i sumandos irreducibles isomorfos a W_i entonces

$$[\chi_M, \chi_M] = m_1^2 + \cdots + m_k^2.$$

Corolario 1.2.2 *Una representación M es irreducible si y solamente si cumple que $[\chi_M, \chi_M] = 1$.*

Corolario 1.2.3 *Cada representación irreducible W aparece, salvo isomorfismo, como sumando directo de la representación regular $F[G]$ exactamente $\dim W$ veces.*

Demostración. La representación ρ asociada a $F[G]$ viene dada por $\rho_g(h) = gh$, por lo que si se elige como base de $F[G]$ el grupo G entonces se ve claramente que $\text{traza}(\rho_g) = 0$ a menos que $g = e$, en cuyo caso $\text{traza}(\rho_e) = |G|$. Así $[\chi_{F[G]}, \chi_W] = \frac{1}{|G|} \chi_{F[G]}(e) \chi_W(e) = \frac{1}{|G|} |G| \dim W = \dim W$. ■

Todavía podemos estirar un poco más la técnica de promediar. Por ejemplo, dada una representación irreducible $\rho: F[G] \rightarrow \text{End}(W)$ con F algebraicamente cerrado y una función de clase $f: G \rightarrow F$, consideramos

$$\rho_f := \sum_{h \in G} f(h) \rho_{h^{-1}}.$$

Al ser la función de clase tenemos

$$\begin{aligned} \rho_f(gw) &= \sum_{h \in G} f(h) h^{-1} gw = g \sum_{h \in G} f(h) g^{-1} h^{-1} gw = g \sum_{h \in G} f(ghg^{-1}) h^{-1} w \\ &= g \sum_{h \in G} f(h) h^{-1} w = g \rho_f(w) \end{aligned}$$

por lo que, al ser W irreducible el Lema de Schur nos dice que $\rho_f = \lambda \text{Id}_W$. Tomando trazas vemos que

$$\rho_f = \lambda \text{Id}_W \quad \text{con} \quad \lambda \dim W = \sum_{h \in G} f(h) \chi_W(h^{-1})$$

Corolario 1.2.4 *El conjunto de caracteres de representaciones irreducibles de G forma una base ortonormada del espacio vectorial de las funciones de clase.*

Demostración. Bastará ver que no existe ninguna función de clase no nula que sea ortogonal a todos los caracteres irreducibles ya que la forma bilineal $[\cdot, \cdot]$ no es degenerada.

Si f es una función de clase ortogonal a todos los caracteres de representaciones irreducibles entonces, para cada representación irreducible $\rho: F[G] \rightarrow \text{End}(W)$ se tiene $(\dim W)\rho_f = |G|[f, \chi_W] = 0$. Fijado un $g \in G$, en lugar de f podemos considerar $f_g: h \mapsto f(hg)$ obteniendo que

$$\begin{aligned} (\dim W)[f_g, \chi_W] &= \frac{\dim W}{|G|} \sum_{h \in G} f(hg) \chi(h^{-1}) = \frac{\dim W}{|G|} \sum_{h \in G} f(h) \chi(gh^{-1}) \\ &= |G| \text{traza} \left(\dim W \sum_{h \in G} f(h) \rho_{gh^{-1}} \right) = |G| \text{traza} (\dim W \rho_g \rho_f) = 0 \end{aligned}$$

ya que $(\dim W)\rho_f = 0$. Así pues, para cada representación irreducible W se tiene $[f_g, (\dim W)\chi_W] = 0$. Como W aparece $\dim W$ veces en la representación regular $F[G]$ entonces $[f_g, \chi_{F[G]}] = 0$. Esto implica que $0 = [f_g, \chi_{F[G]}] = \frac{1}{|G|} f_g(e) \chi_{F[G]}(e) = f_g(e) = f(g)$, por lo que f es nula. ■

Corolario 1.2.5 *El número de representaciones irreducibles de G no isomorfas entre sí coincide con el número de clases de conjugación de G .*

Demostración. Al ser los caracteres de las representaciones irreducibles una base (ortonormada) del espacio de funciones de clase, su número coincide con la dimensión de este espacio, que es el número de clases de conjugación de G . ■

Definición 1.2.3 *La **tabla de caracteres** de G sobre F es una tabla cuyas columnas representan a cada una de las clases de conjugación de G y cuyas filas representan a cada uno de los caracteres de las representaciones irreducibles de G con coeficientes en F . El elemento en la fila representada por el carácter χ_W y en la columna representada por la clase de conjugación de g es $\chi_W(g)$.*

Para acabar este apartado vamos a ver cómo se comportan los caracteres con respecto al **producto tensorial** de representaciones. El producto tensorial $M' \otimes_F M''$ de dos representaciones lineales M', M'' de G es nuevamente una representación lineal mediante

$$g \cdot x' \otimes x'' = (gx') \otimes (gx'')$$

donde \cdot lo hemos incluido por claridad como un separador entre g y el elemento $x' \otimes x''$.

Proposición 1.2.4 *Se tiene que $\chi_{M' \otimes_F M''} = \chi_{M'} \chi_{M''}$.*

Demostración. Sean ρ', ρ'' las representaciones asociadas a M' y M'' y $\rho' \otimes \rho''$ la asociada a $M' \otimes_F M''$. Sean $B' = \{x'_1, x'_2, \dots\}$ y $B'' := \{x''_1, x''_2, \dots\}$ bases de M' y M'' . Una base de $M' \otimes_F M''$ es $B := \{x'_1 \otimes x''_1, x'_1 \otimes x''_2, \dots, x'_2 \otimes x''_1, x'_2 \otimes x''_2, \dots\}$. Si $R'(g) = (\alpha_{ij})_{i,j}$ es la matriz coordenada de ρ'_g respecto de B' y $R''(g)$ es la

de ρ''_g respecto de B'' entonces la matriz coordenada de $(\rho' \otimes \rho'')_g$ respecto de la base B es

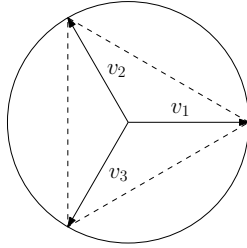
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}R''(g) & \alpha_{12}R''(g) & \cdots \\ \alpha_{21}R''(g) & \alpha_{22}R''(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

por lo que su traza, es decir $\chi_{M' \otimes_F M''}(g)$ es exactamente $\sum_i \alpha_{ii} \text{traza}(R''(g)) = \text{traza}(R'(g)) \text{traza}(R''(g)) = \chi_{M'}(g) \chi_{M''}(g)$. ■

1.3. Ejemplo

Asumimos conocidos los rudimentos de los grupos simétricos. Aun así, en la Sección 2.1 hemos recopilado algún resultado y algo de notación que quizás pueda consultarse antes de leer este ejemplo.

El grupo simétrico S_3 de grado 3 es isomorfo al grupo diédrico D_3 . Esto nos permite ver los elementos de S_3 como isometrías que dejan estable un triángulo equilátero T inscrito en la circunferencia de radio 1 centrada en el origen obteniendo una representación V de dimensión 2 de S_3 .



Sean v_1, v_2, v_3 los vectores determinados por los vértices de T . Claramente $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. La permutación σ se representa como la isometría que envía el vector v_i a $v_{\sigma(i)}$.

Vamos a estudiar esta representación. Primero comprobaremos que es irreducible de un modo directo. Si V no lo fuese, entonces existiría $0 \neq W < V$ estable por la acción de S_3 . Por lo tanto, como $\dim V = 2$, $W = \mathbb{R}w$ y $\sigma w \in \mathbb{R}w$ para todo $\sigma \in S_3$. Sabemos que $w = \alpha v_1 + \beta v_2$ para ciertos valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alguno no nulo. Al hacer actuar las trasposiciones $\sigma_1 = (12)$, y $\sigma_2 = (13)$ en w obtenemos

$$\sigma_1 w = \alpha(12)v_1 + \beta(12)v_2 = \alpha v_2 + \beta v_1$$

$$\sigma_2 w = \alpha(13)v_1 + \beta(13)v_2 = \alpha(-v_1 - v_2) + \beta v_2 = -\alpha v_1 + (\beta - \alpha)v_2$$

que deben ser proporcionales a w . En particular, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta - \alpha \end{vmatrix}$, lo que fácilmente implica que $\alpha = \beta = 0$. Así pues, V es una representación irreducible de S_3 .

Calculemos ahora el carácter χ_V de esta representación. Las permutaciones $\text{Id}, (123), (321)$ se corresponden con los giros de 0, 120 y 240 grados respectivamente mientras que las trasposiciones $(12), (13), (23)$ se corresponden con simetrías. Claramente

$$\chi_V(\text{Id}) = \dim V = 2.$$

Las simetrías tienen matriz coordenada $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de alguna base, por lo que

$$\chi_V((12)) = \chi_V((13)) = \chi_V((23)) = 0.$$

Un giro de ángulo θ tiene matriz coordenada $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ con traza $2 \cos(\theta)$. Por tanto

$$\chi_V((123)) = 2 \cos(120) = -1 = \chi_V((321)).$$

Calculamos ahora el producto $[\chi_V, \chi_V]$ para comprobar de otro modo que V es irreducible.

$$[\chi_V, \chi_V] = \frac{1}{6} (2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)) = 1$$

Aunque hemos visto que esta propiedad caracteriza a los módulos irreducibles, lo hemos observado para F algebraicamente cerrado, pero \mathbb{R} no lo es, por lo que no podemos concluir tan directamente que V es irreducible simplemente a partir de su carácter. Si en lugar de $V = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$ cambiamos a $\bar{V} := \mathbb{C}v_1 + \mathbb{C}v_2$ (plano complejo en lugar del real) se sigue obteniendo una representación lineal de S_3 de dimensión 2 y ahora sí que podemos asegurar, sin más que observar que $[\chi_{\bar{V}}, \chi_{\bar{V}}] = [\chi_V, \chi_V] = 1$ que \bar{V} es irreducible (y esto implica que V también lo es).

S_3 tiene tres clases de conjugación, la de Id , la de (12) y la de (123) . Por tanto hay dos representaciones irreducibles con coeficientes en \mathbb{C} que desconocemos. Afortunadamente son muy sencillas de obtener. Una de ellas es la representación trivial de S_3 en el \mathbb{C} -espacio vectorial \mathbb{C} , que al tener dimensión 1 será automáticamente irreducible. Esta representación viene dada por

$$\sigma\alpha := \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \sigma \in S_3$$

El carácter de esta representación es $\chi_+ : \sigma \mapsto 1$ para todo $\sigma \in S_3$. La otra representación es la alternada, que también se define en el \mathbb{C} -espacio vectorial \mathbb{C} pero mediante

$$\sigma\alpha := \text{sig}(\sigma)\alpha$$

donde $\text{sig}(\sigma) = 1$ si σ es una permutación par (producto de un número par de trasposiciones) y -1 si es impar (producto de un número impar de trasposiciones). El carácter de esta representación es $\chi_- : \sigma \mapsto \text{sig}(\sigma)$. Así, la tabla de

caracteres de S_3 (sobre \mathbb{C}) sería

	Id	(12)	(123)
χ_+	1	1	1
χ_-	1	-1	1
$\chi_{\bar{V}}$	2	0	-1

Para hacernos una idea de la utilidad de la tabla de caracteres vamos a estudiar la representación $W := \bar{V} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{V}$. Puesto que $\chi_W = \chi_{\bar{V} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{V}} = \chi_{\bar{V}}^2$ entonces

	Id	(12)	(123)
χ_W	4	0	1

Ahora es muy sencillo calcular

$$\begin{aligned} [\chi_W, \chi_+] &= \frac{1}{3!} \{4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1\} = \frac{4+2}{3!} = \frac{6}{6} = 1 \\ [\chi_W, \chi_{\bar{V}}] &= \frac{1}{3!} \{4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)\} = \frac{8-2}{3!} = \frac{6}{6} = 1 \\ [\chi_W, \chi_-] &= \frac{1}{3!} \{4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1\} = \frac{4+2}{3!} = \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

Así, la descomposición de $\bar{V} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{V}$ en suma directa de módulos irreducibles tiene exactamente 3 sumandos, que son isomorfos a la representación trivial, a la alternada y a la representación \bar{V} .

Vamos ahora a comprobar directamente que lo que se acaba de inferir mediante el uso de caracteres es cierto. En este ejemplo es sencillo, pero en otros encontrar la descomposición en suma de submódulos irreducibles puede ser realmente muy complicado. En ese sentido el uso de caracteres es una herramienta muy potente en el estudio de las representaciones. Empezaremos definiendo los siguientes elementos y subespacios en W

- $w_0 := 2(v_1 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_2) + (v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1)$ y $W_0 := \mathbb{C}w_0$;
- $w_{-1} := v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$ y $W_{-1} := \mathbb{C}w_{-1}$;
- $w_1 := v_1 \otimes v_1 - v_2 \otimes v_2$, $w_2 := (13)w_1 = v_1 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$ y $W_1 := \mathbb{C}w_1 + \mathbb{C}w_2$.

y vamos a comprobar que W_0, W_{-1} y W_1 son submódulos de W . Ya que toda permutación en S_3 es producto reiterado de las trasposiciones (12) y (13) bastará con observar que al aplicar estas trasposiciones a los elementos de la base de cada subespacio obtenemos de nuevo un elemento del subespacio.

Comenzamos con W_0 :

$$\begin{aligned} (12)w_0 &= 2((12)v_1 \otimes (12)v_1 + (12)v_2 \otimes (12)v_2) + ((12)v_1 \otimes (12)v_2 \\ &\quad + (12)v_2 \otimes (12)v_1) \\ &= 2(v_2 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_1) + (v_2 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_2) = w_0 \end{aligned}$$

Del mismo modo obtenemos que $(13)w_0 = w_0$. Así, W_0 es submódulo de W .

Consideramos ahora W_{-1} :

$$(12)w_{-1} = (12)v_1 \otimes (12)v_2 - (12)v_2 \otimes (12)v_1 = v_2 \otimes v_1 - v_1 \otimes v_2 = -w_{-1}$$

Del mismo modo se obtiene que $(13)w_{-1} = -w_{-1}$. Así, W_{-1} es submódulo de W .

Finalmente consideramos W_1 :

$$(12)w_1 = (12)v_1 \otimes (12)v_1 - (12)v_2 \otimes (12)v_2 = v_2 \otimes v_2 - v_1 \otimes v_1 = -w_1$$

$$\begin{aligned} (13)w_1 &= (13)v_1 \otimes (13)v_1 - (13)v_2 \otimes (13)v_2 \\ &= (-v_1 - v_2) \otimes (-v_1 - v_2) - v_2 \otimes v_2 \\ &= v_1 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_2 \\ &= v_1 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 = w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12)w_2 &= (12)v_1 \otimes (12)v_1 + (12)v_1 \otimes (12)v_2 + (12)v_2 \otimes (12)v_1 \\ &= v_2 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_2 = w_2 - w_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13)w_2 &= (13)v_1 \otimes (13)v_1 + (13)v_1 \otimes (13)v_2 + (13)v_2 \otimes (13)v_1 \\ &= (-v_1 - v_2) \otimes (-v_1 - v_2) + (-v_1 - v_2) \otimes v_2 + v_2 \otimes (-v_1 - v_2) \\ &= v_1 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \\ &\quad + v_2 \otimes v_2 - v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 - v_2 \otimes v_2 \\ &= v_1 \otimes v_1 - v_2 \otimes v_2 = w_1 \end{aligned}$$

Así, W_1 es submódulo de W . Además

$$W = W_0 \oplus W_{-1} \oplus W_1.$$

Podemos calcular el carácter de cada representación W_0, W_{-1}, W_1 para ver que efectivamente corresponden con los de las representaciones trivial, alterna y \bar{V} respectivamente. Los caso W_0, W_{-1} son inmediatos, por lo que solamente lo haremos para W_1 . La matriz coordinada asociada a la representación de (12) en W_1 respecto de la base $\{w_1, w_2\}$ es $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mientras que para (13) se obtiene $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La del $(123) = (13)(12)$ será entonces $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. El carácter queda

$$\frac{\text{Id}}{2} \quad \frac{(12)}{0} \quad \frac{(123)}{-1}$$

como era de esperar ya que debía coincidir con el de \bar{V} .

Hemos visto que el cálculo, salvo isomorfismo, de la descomposición en submódulos irreducibles de W ha sido muy sencillo usando caracteres pero bastante más complicado si se pretende encontrar exactamente los submódulos que forman tal descomposición.

Capítulo 2

Representaciones del grupo simétrico

Para la elaboración de este capítulo se ha seguido el libro de B. E. Sagan [4].

En general, describir las representaciones irreducibles y calcular la tabla de caracteres de un grupo finito G no es tarea sencilla. En este capítulo vamos a hacerlo para el grupo simétrico S_n . La aproximación que se ha elegido es combinatoria ya que en los últimos años ha habido un renacimiento del estudio de las representaciones de grupos y álgebras mediante estas técnicas. Como puede comprenderse, solamente podremos abordar los aspectos más básicos de una rama de las matemáticas que cuenta con más de un siglo de desarrollo, y aun así se ha tenido que seleccionar los resultados para lograr una exposición lo suficientemente breve y directa que dejase espacio para practicar con algunos ejemplos.

2.1. El grupo simétrico

Dado un conjunto A , una **permutación** de A es una biyección de A en A . El conjunto de todas las permutaciones de A con la composición de aplicaciones es un grupo al que denotaremos por S_A . Si $A = \{1, \dots, n\}$ entonces este grupo se llama **grupo simétrico** de grado n y se denota simplemente por S_n . En particular el grupo simétrico está definido para todo $n \geq 0$ y su orden es $n!$.

Dado $\sigma \in S_n$, se dice que σ es un **ciclo de longitud l** (o l -ciclo) y se denota por $\sigma = (a_1 \dots a_l)$ si $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_l) = a_1$ y $\sigma(b) = b$ para todo $b \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$. Se dice que dos ciclos $(a_1 \dots a_l)$ y $(a'_1 \dots a'_{l'})$ son **disjuntos** si los conjuntos $\{a_1, \dots, a_l\}$ y $\{a'_1, \dots, a'_{l'}\}$ lo son. Los ciclos de longitud 2 se llaman **trasposiciones**.

Dos resultados importantes que se discuten en la asignatura *Estructuras algebraicas* son

Proposición 2.1.1 *Cualquier permutación de S_n distinta de la identidad se puede expresar de manera única, salvo por el orden de los factores ya que conmutan, como el producto de ciclos disjuntos de longitud mayor o igual que 2.*

Proposición 2.1.2 *Dos permutaciones σ, σ' distintas de la identidad de S_n son conjugadas si y solamente si para todo $l = 2, \dots, n$ el número de ciclos de longitud l en la factorización de σ como producto de ciclos disjuntos coincide con el de σ' .*

Por una cuestión de notación, normalmente los 1-ciclos se omiten cuando se escribe una permutación.

Definición 2.1.1 *Dado $n \in \mathbb{N}$, una **partición** λ de n es una tupla $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ con $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$ y $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = n$ (normalmente se asume $\lambda_i > 0$). Para indicar que λ es una partición de n se usa la notación $\lambda \vdash n$ mientras que $|\lambda|$ denota el valor n .*

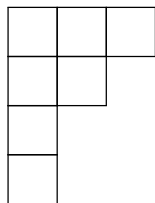
La Proposición 2.1.2 nos dice que las clases de conjugación de S_n están en correspondencia biyectiva con las particiones de n . Las permutaciones en la clase de conjugación asociada a $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$ son las que se pueden expresar como producto de ciclos disjuntos de longitudes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Por abreviar, la partición $(1, \dots, 1)$ la denotaremos a veces como $(1)^n$.

2.2. Diagramas de Young

Las representaciones irreducibles del grupo simétrico que se construirán se basan en el concepto de diagrama de Young.

Definición 2.2.1 *Un **diagrama de Young** es una pila de varias hileras de casillas justificadas por la izquierda de modo que cada hilera no contiene más casillas que la hilera inmediatamente superior.*

Ejemplo 2.2.1



Claramente, dar un diagrama de Young con n casillas equivale a dar una partición de n .

Definición 2.2.2 *Un **λ -tablero** es una disposición de los números $\{1, \dots, |\lambda|\}$ en las casillas de λ sin usar dos veces un mismo número.*

Ejemplo 2.2.2

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array}$$

Definición 2.2.3 Sea λ un diagrama de Young y T un λ -tablero. Se define el **diagrama λ' opuesto** a λ como el obtenido al trasponer λ . Análogamente se define el tablero T' opuesto a T .

Ejemplo 2.2.3

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 & 7 \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

Definición 2.2.4 El grupo simétrico S_n permuta los λ -tableros. Dado un λ -tablero T y $\sigma \in S_n$ se define σT como el tablero que contiene $\sigma(i)$ en la casilla en la que T contiene a i .

Ejemplo 2.2.4

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array} \quad \sigma T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \sigma(1) & \sigma(3) & \sigma(5) \\ \hline \sigma(2) & \sigma(4) & \\ \hline \sigma(6) & & \\ \hline \sigma(7) & & \\ \hline \end{array}$$

Definición 2.2.5 Sea T un λ -tablero, el **grupo de filas** $R(T)$ de T es el conjunto de permutaciones que no cambian de fila a los elementos de las casillas de T . El **grupo de columnas** $C(T)$ de T es el conjunto de permutaciones que no cambian de columna a los elementos de las casillas de T .

Ejemplo 2.2.5 Para el tablero T del ejemplo anterior podemos identificar

$$R(T) \text{ con } S_{\{1,3,5\}} \times S_{\{2,4\}} \times S_{\{6\}} \times S_{\{7\}} \text{ y}$$

$$C(T) \text{ con } S_{\{1,2,6,7\}} \times S_{\{3,4\}} \times S_{\{5\}}.$$

Proposición 2.2.1 $R(\sigma T) = \sigma R(T) \sigma^{-1}$ y $C(\sigma T) = \sigma C(T) \sigma^{-1}$.

Demostración. Sea τ una permutación, $\tau \in R(\sigma T)$ si y solamente si τ preserva las filas de σT , pero esto equivale a que $\sigma^{-1}\tau\sigma$ preserve las de T ; es decir, a que τ pertenezca a $\sigma R(T)\sigma^{-1}$. Un argumento similar es válido para el grupo de columnas. ■

En el conjunto de particiones se define una relación de orden parcial: dadas $\lambda, \mu \vdash n$.

$$\lambda << \mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k \mu_i \quad \forall k$$

Si $\lambda << \mu$ entonces se dice que μ **domina a** λ .

Definición 2.2.6 Sea T un λ -tablero, un μ -tablero R se dice que es **antidisjunto** para T si no hay dos elementos en una columna de R que aparezcan en una fila de T .

Ejemplo 2.2.6 Sea T el siguiente λ -tablero:

$T =$

3	1	6
2	4	
5		

$R =$

3	2	1
4	6	
5		

Claramente el μ -tablero R es antidisjunto para T .

Lema 2.2.1 Sean R y T un μ -tablero y un λ -tablero respectivamente. Si R es antidisjunto para T entonces μ domina a λ . Además, si $\mu = \lambda$ entonces existe $p \in R(T)$ y $q \in C(R)$ tal que $pT = qR$.

Demostración. Si R es antidisjunto para T entonces los elementos de la primera fila de T aparecen en distintas columnas de R . Por lo tanto, existe $q_1 \in C(R)$ tal que todos aparecen en la primera fila de $q_1 R$. Los elementos de la segunda fila de T aparecen en distintas columnas de $q_1 R$. Por lo tanto, existe $q_2 \in C(q_1 R) = q_1 C(R)q_1^{-1} = C(R)$ tal que aparecen en las dos primeras filas de $q_1 q_2 R$. Y así ocurre sucesivamente, de modo que llegamos a que $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq \mu_1 + \dots + \mu_k$ para todo k . Por lo tanto, $\lambda << \mu$.

Si además, $\lambda = \mu$ entonces, salvo reordenación, las filas de T coinciden con las filas de qR para algún $q \in C(R)$. Por lo tanto, existirá $p \in R(T)$ tal que $pT = qR$. ■

Ejemplo 2.2.7 *Considerar*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad R = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

Veamos que $pT = qR$ para algún $p \in R(T)$ y algún $q \in C(T)$. Elegimos por ejemplo la permutación $p \in R(T)$ que permuta el 1 con el 6 y el 2 con el 4, es decir, p no cambia de fila los elementos de las casillas de T y permuta en la primera fila el 1 con el 6 y en la segunda fila el 2 con el 4. Así,

$$pT = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 1 \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

Por otro lado, elegimos la permutación $q \in C(R)$ que permuta el 6 con el 2, es decir, q no cambia de columna los elementos de las casillas de R y permuta el 1 con el 6. De forma que:

$$qR = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 1 \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} = pT$$

2.3. Módulos de Specht

Los módulos de Specht son, sobre cuerpos cuya característica no divide a $n!$, una forma de describir los módulos irreducibles de S_n . En lo que sigue asumiremos siempre que $n \geq 2$ y que $\text{car } F$ no divide a $n!$. En particular, $\text{car } F \neq 2$. Los tabloides serán el objeto combinatorio que modela una cierta representación inducida. Sea $\lambda \vdash n$ y T_0 un λ -tablero fijo. Consideramos la representación trivial de $R(T_0)$:

$$R(T_0) \rightarrow F^\times, \quad p \mapsto 1$$

y definimos

$$M^\lambda := F[S_n] \otimes_{F[R(T_0)]} F$$

que es una representación (representación inducida) de dimensión $\frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k!}$ si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Una permutación σ se puede identificar con el tablero σT_0 , pero para un elemento $\sigma \otimes 1$ de la representación inducida la situación cambia. Como $\sigma \otimes 1 =$

$\sigma \otimes p1 = \sigma p \otimes 1$ para todo $p \in R(T_0)$ entonces el modelo combinatorio de estos elementos es el siguiente:

Definición 2.3.1 Dos λ -tableros se dicen **equivalentes por filas** si sus filas contienen los mismos elementos, aunque quizás en distinto orden. La clase de equivalencia $\{T\}$ de T se llama **λ -tabloide**.

Ejemplo 2.3.1 Los siguientes λ -tableros son equivalentes por filas:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad R = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

Sus respectivas clases de equivalencia se denotan por:

$$\{T\} = \begin{array}{c} \overline{3 \quad 1 \quad 6} \\ \overline{2 \quad 4} \\ \overline{5} \end{array} \quad \{R\} = \begin{array}{c} \overline{6 \quad 3 \quad 1} \\ \overline{4 \quad 2} \\ \overline{5} \end{array}$$

y son la misma. El eliminar las líneas verticales en los tableros para denotar tabloides indica exactamente eso, que el orden en que están dados los elementos de las filas es irrelevante.

Nota 2.3.1 Claramente

- hay $\frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_k!}$ λ -tabloides y
- S_n actúa de modo natural sobre los λ -tabloides mediante

$$\sigma\{T\} = \{\sigma T\}$$

Identificando biyectivamente $\sigma \otimes 1$ con $\{\sigma T_0\}$ vemos que M^λ se puede considerar como el espacio vectorial que tiene como base al conjunto de los λ -tabloides con la acción natural de S_n . En particular, el espacio M^λ no depende del tablero inicial T_0 que usemos.

Dado un λ -tablero T se define:

$$a_T := \sum_{p \in R(T)} p$$

$$b_T := \sum_{q \in C(T)} \text{sig}(q)q$$

Nota 2.3.2 Se tiene que

- $\forall p \in R(T)$, $pa_T = a_T = a_T p$. Por lo tanto,

$$a_T^2 = |R(T)|a_T$$

ya que $a_T a_T = \sum_{p \in R(T)} pa_T = \sum_{p \in R(T)} a_T = |R(T)|a_T$.

- $\forall q \in C(T)$, $qb_T = \text{sig}(q)b_T = b_T q$ por lo que, usando un argumento similar,

$$b_T^2 = |C(T)|b_T.$$

Definición 2.3.2 Dado un λ -tablero T se define el **politableoide** e_T como

$$e_T := b_T\{T\} = \sum_{q \in C(T)} \text{sig}(q)\{qT\}$$

Nota 2.3.3 Observar que $e_T \neq 0$ ya que si $\{q_1 T\} = \{q_2 T\}$ para $q_1, q_2 \in C(T)$ entonces $\{T\} = \{q_1^{-1} q_2 T\}$ por lo que $q_1^{-1} q_2 \in R(T) \cap C(T) = \{\text{Id}\}$ y así $q_1 = q_2$. Por lo tanto, no hay cancelación en los sumandos que componen e_T .

Nota 2.3.4 En cuanto a la acción del grupo simétrico en los politableoides se tiene que

$$\sigma e_T = \sigma b_T\{T\} = \sigma b_T \sigma^{-1} \sigma\{T\} = \sigma b_T \sigma^{-1} \{\sigma T\} \underset{\sigma b_T \sigma^{-1} = b_{\sigma T}}{=} b_{\sigma T} \{\sigma T\} = e_{\sigma T}$$

Definición 2.3.3 Se llama **módulo de Specht** S^λ al submódulo M^λ generado por los λ -politableoides.

La descripción de la acción de S_n en los elementos e_T generadores de S^λ es muy sencilla, pero hay que observar que estos elementos pueden no formar una base, por lo que no pueden usarse tal cual para el cálculo de caracteres.

El siguiente resultado lo usaremos con mucha frecuencia en los razonamientos.

Lema 2.3.1 Sean $\lambda, \mu \vdash n$ y sean T, R λ y μ -tableros respectivamente:

1. Si R no es antidisjunto para T entonces $b_R\{T\} = 0$.
2. Si R es antidisjunto para T y $\lambda = \mu$ entonces $b_R\{T\} = \pm e_R$.

Demostración.

1. En este caso, como R no es antidisjunto de T entonces existen dos elementos de R que están en una fila de T . Consideramos τ la trasposición entre ellos, entonces:

$$b_R\{T\} = b_R(\tau\{T\}) = (b_R \tau)\{T\} \underset{b_R \tau = \text{sig}(\tau) b_R}{=} \text{sig}(\tau) b_R\{T\} \underset{\text{sig}(\tau) = -1}{=} -b_R\{T\}$$

Es decir,

$$b_R\{T\} + b_R\{T\} = 0 \Rightarrow 2b_R\{T\} = 0$$

Y como $\text{car } F \neq 2$ tenemos que:

$$b_R\{T\} = 0$$

2. En este caso R es antidisjunto para T y $\lambda = \mu$ por lo que existe $p \in R(T)$ y $q \in C(R)$ tales que $pT = qR$. Por lo tanto:

$$b_R\{T\} = b_R\{pT\} = b_R\{qR\} = b_Rq\{R\} \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ b_Rq = \text{sig}(q)b_R}}{=} \text{sig}(q)b_R\{R\} = \text{sig}(q)e_R$$

■

Antes de realizar un ejemplo, veamos una observación.

Nota 2.3.5 *En general, dado un λ -tablero T_1 y $\sigma \in C(T_1)$*

$$e_{\sigma T_1} = \sigma e_{T_1} = \sigma b_{T_1}\{T_1\} = \text{sig}(\sigma)b_{T_1}\{T_1\} = \text{sig}(\sigma)e_{T_1}$$

Vayamos ahora con el ejemplo.

Ejemplo 2.3.2 (Módulos de Specht de S_3) *Las particiones de 3 son*

$$1 + 1 + 1, \quad 2 + 1, \quad 3$$

por lo que hay 3 módulos de Specht:

$$S^{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}}, S^{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}, S^{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \end{smallmatrix}}$$

Vamos a estudiar cada uno de ellos. Empezamos con $S^{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \end{smallmatrix}}$. Tomamos el λ -tablero

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

cuya clase de equivalencia es:

$$\{T\} = \overline{1 \ 2 \ 3}$$

Claramente, denotando la identidad $\text{Id} \in S_n$ por e ,

$$C(T) = \{e\} \quad y \quad b_T = \sum_{q \in C(T)} \text{sig}(q)q = e.$$

El politabloide e_T es:

$$e_T = b_T\{T\} = e\{T\} = e\overline{1 \ 2 \ 3} = \overline{1 \ 2 \ 3}$$

Por lo que,

$$S^{\square\square\square} = F \left\langle \overline{1 \ 2 \ 3} \right\rangle$$

Ahora procedemos con S^{\square} . Consideramos primero

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \{T_1\} = \overline{\frac{1}{3}}$$

El grupo de columnas $C(T_1)$ es todo el grupo simétrico S_3 . Así,

$$b_{T_1} = \sum_{q \in C(T_1)} \text{sig}(q)q = \text{Id} - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)$$

$$e_{T_1} = \sum_{q \in C(T_1)} \text{sig}(q)\{qT_1\} = \overline{\frac{1}{2}} - \overline{\frac{2}{3}} - \overline{\frac{3}{2}} - \overline{\frac{1}{3}} + \overline{\frac{2}{3}} + \overline{\frac{3}{1}}$$

Vemos que si en lugar de T_1 hubiésemos considerado cualquier otro tablero T , el e_T resultante habría sido el mismo salvo por un posible signo. Así que

$$S^{\square} = F \left\langle e \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Finalmente procedemos con $S^{\square\square}$. Los posibles tableros T para calcular los politabloides e_T son los siguientes T_1, \dots, T_6 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Comenzamos con

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \{T_1\} = \overline{\frac{1 \ 2}{3}}$$

Claramente $C(T_1) = \{\text{Id}, (13)\}$, $b_{T_1} = \text{Id} - (13)$ y

$$e_{T_1} = b_{T_1}\{T_1\} = \sum_{q \in C(T_1)} \text{sig}(q)\{qT_1\} = \overline{\frac{1 \ 2}{3}} - \overline{\frac{3 \ 2}{1}}$$

Haciendo lo mismo con los otros tableros obtenemos

$$\begin{aligned}
e_{T_2} &= \frac{\overline{1\ 3}}{2} - \frac{\overline{2\ 3}}{1} \\
e_{T_3} &= \frac{\overline{2\ 1}}{3} - \frac{\overline{3\ 1}}{2} = e_{T_1} - e_{T_2} \\
e_{T_4} &= \frac{\overline{2\ 3}}{1} - \frac{\overline{1\ 3}}{2} e = -e_{T_2} \\
e_{T_5} &= \frac{\overline{3\ 2}}{1} - \frac{\overline{1\ 2}}{3} = -e_{T_1} \\
e_{T_6} &= \frac{\overline{3\ 1}}{2} - \frac{\overline{2\ 1}}{3} = -e_{T_3} = e_{T_2} - e_{T_1}
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$S^{\square} = F\langle e_{\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}}, e_{\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}} \rangle$$

Vamos a ver ahora que los módulos de Specht proporcionan las representaciones irreducibles del grupo simétrico. Recordar que si \bar{F} es la clausura algebraica de F y M es una representación de un grupo G entonces $\bar{M} := \bar{F} \otimes_F M$ es también una representación (pero con coeficientes en \bar{F}) mediante

$$g \cdot \alpha \otimes x := \alpha \otimes gx$$

donde $\alpha \in \bar{F}$, $x \in M$ y $g \in G$. El punto se usa nuevamente como un mero separador. Es interesante observar que si $W \leq M$ es un submódulo de M entonces claramente $\bar{W} := \bar{F} \otimes_F W$ lo es de \bar{M} . Así que si M no es irreducible tampoco lo será \bar{M} pero si M sí es irreducible entonces \bar{M} podría serlo (y decimos que M es **absolutamente irreducible**) o no.

Teorema 2.3.1 *Para S_n se tiene que*

1. S^λ es absolutamente irreducible.
2. S^λ es isomorfo a S^μ si y solamente si $\lambda = \mu$.

Demostración.

1. Por el Lema 2.3.1 sabemos que dados dos λ -tableros R y T el elemento $b_R\{T\}$ es o bien 0 o bien $\pm e_R$. Por lo tanto, como $b_R e_R = b_R b_R\{R\} = b_R^2\{R\} = |C(R)|b_R\{R\} = |C(R)|e_R \neq 0$ (ya que $e_R \neq 0$ y $|C(R)|$ divide a $n!$ que es primo con $\text{car } F$) entonces $b_R S^\lambda \neq 0$. Así $0 \neq b_R S^\lambda \subseteq b_R M^\lambda = F e_R$ implica

$$b_R M^\lambda = F e_R = b_R S^\lambda.$$

Extendiendo escalares a la clausura algebraica \bar{F} de F , consideramos la descomposición $\bar{S}^\lambda = \oplus W_i$ con W_i $\bar{F}[S_n]$ -módulo irreducible. Por el mismo motivo $\bar{F}e_T = b_T \bar{S}^\lambda = \oplus_i b_T W_i$ y así existe algún i tal que $b_T W_i \neq 0$. Comparando dimensiones obtenemos que $b_T W_i = \bar{F}e_T$. Esto nos dice que $e_T \in b_T W_i \subseteq W_i$, por lo que como W_i es submódulo y $\sigma e_T = e_{\sigma T}$ entonces W_i contiene todos los λ -politabloides, es decir, $\bar{S}^\lambda = W_i$ irreducible.

2. La implicación recíproca es obvia, por lo que nos centramos en la implicación directa. Sean $\lambda, \mu \vdash n$ y asumamos que existe un isomorfismo de $F[S_n]$ -módulos $f: S^\lambda \rightarrow S^\mu$. Sea T un λ -tablero, como $b_T S^\lambda = F e_T \neq 0$ existe algún $x \in S^\lambda$ tal que $b_T x \neq 0$. Así, $0 \neq f(b_T x) = b_T f(x)$ y por lo tanto b_T no anula a todo S^μ . Ahora bien, $f(x)$ es una combinación lineal de μ -tabloides por lo que $b_T f(x) \neq 0$ implica que existe algún μ -tabloide $\{R\}$ tal que $b_T \{R\} \neq 0$. Esto nos dice que T es antidisjunto para R y, en consecuencia, que λ domina a μ , es decir, $\mu << \lambda$. De la misma forma, tomando f^{-1} , obtendríamos $\lambda << \mu$. Concluimos que $\lambda = \mu$. ■

Bajo la hipótesis de que $\text{car } F$ no divide a $n!$, los módulos de Specht proporcionan todas las representaciones irreducibles de S_n . Esto es así ya que si $F = \bar{F}$ es algebraicamente cerrado entonces sabemos que S_n tiene tanta representaciones irreducibles como clases de conjugación, es decir, una por cada partición de n . En general, aunque no lo justificaremos, también es cierto sobre cuerpos no algebraicamente cerrados. Sin embargo, el estudio de las representaciones de S_n para cuerpos cuya característica no es prima con $n!$ es un problema abierto, uno de los más importantes en el estudio de las representaciones de grupos finitos.

En el Corolario 1.2.3 se observó que cada representación irreducible aparece en la representación regular. Vamos a encontrar dentro de $F[S_n]$ un submódulo isomorfo a S^λ . Esto nos dará una descripción, no combinatoria, de las representaciones irreducibles de S_n . El concepto clave es el de simetrizador de Young.

Definición 2.3.4 *Dado un λ -tablero T , el elemento*

$$C_T = a_T b_T$$

*se llama **simetrizador de Young**.*

Lema 2.3.2 *Sea $c \in F[S_n]$ tal que $pc = c = \text{sig}(q)cq$ para todo $p \in R(T)$ y $q \in C(T)$. Se tiene que $c \in FC_T$.*

Demostración. Escribimos c como $c = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma$. Por hipótesis sabemos que $pc = c = \text{sig}(q)cq$ para cualesquiera $p \in R(T)$ y $q \in C(T)$. Así,

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma p \sigma = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma = \text{sig}(q) \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma q.$$

Comparando el coeficiente con que aparece $\sigma_0 \in S_n$ en cada una de las igualdades, como $p(p^{-1}\sigma_0) = \sigma_0 = (\sigma_0 q^{-1})q$ tenemos que $\alpha_{p^{-1}\sigma_0} = \alpha_{\sigma_0} = \alpha_{\sigma_0 q^{-1}}$. Cambiando σ_0 por $p\sigma$ o por σq obtenemos

$$\alpha_{p\sigma} = \alpha_{\sigma} = \alpha_{\sigma q}.$$

Vamos a demostrar que si $\sigma \neq pq$ para ciertos $p \in R(T)$ y $q \in C(T)$ entonces $\alpha_{\sigma} = 0$. En efecto, dado un tal σ , sea $T' := \sigma T$. Si T' es antidisjunto para T entonces existen $p \in R(T)$ y $q' \in C(T')$ tales que $pT = q'T'$. Ahora bien, como $C(T') = \sigma C(T)\sigma^{-1}$ existe $q \in C(T)$ tal que $q' = \sigma q \sigma^{-1}$. Esto nos dice que $pT = q'T' = \sigma q \sigma^{-1} T' = \sigma q \sigma^{-1} \sigma T = \sigma q T$ y así $p = \sigma q$. Despejando obtenemos que $\sigma = pq^{-1}$, lo que sería una contradicción. Concluimos que T' no puede ser antidisjunto para T y que así existe una trasposición $\tau' \in C(T') \cap R(T)$. Como antes, $\tau' = \sigma \tau \sigma^{-1}$ para alguna trasposición $\tau \in C(T)$. Por lo tanto,

$$\alpha_{\sigma} \underset{\tau' \in R(T)}{=} \alpha_{\tau' \sigma} \underset{\tau' = \sigma \tau \sigma^{-1} \Rightarrow \tau' \sigma = \sigma \tau}{=} \alpha_{\sigma \tau} \underset{\tau \in C(T) \text{ es trasp.}}{=} -\alpha_{\sigma}.$$

Como $\text{car } F \neq 2$ esto demuestra que $\alpha_{\sigma} = 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} c &= \sum_{p \in C(T) q \in R(T)} \alpha_{pq} pq \underset{\alpha_{pq} = \alpha_q}{=} \sum_{p \in C(T) q \in R(T)} \alpha_q pq = \\ &\underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{sig}(q)\alpha_{\sigma} = \alpha_{\sigma q}}}{=} \sum_{p \in C(T) q \in R(T)} \text{sig}(q) \alpha_1 pq = \alpha_1 C_T \end{aligned}$$

lo que prueba el enunciado. ■

Proposición 2.3.1 *Sea $\lambda \vdash n$ y T un λ -tablero:*

1. *El módulo $F[S_n]C_T$ es isomorfo a S^{λ} .*
2. *$C_T^2 = n_{\lambda} C_T$ con $n_{\lambda} := \frac{n!}{\dim S^{\lambda}} \neq 0$.*

Demostración. Por brevedad escribiremos A en lugar de $F[S_n]$ y empezaremos demostrando la segunda afirmación. Observamos que cualquier elemento $c \in C_T A C_T$ cumple las hipótesis del lema por hacerlo C_T . Por ejemplo, si $c = C_T a C_T$ y $p \in R(T)$ entonces $pc = p C_T a C_T = C_T a C_T = c$. Del mismo modo se obtiene que $cq = \text{sig}(q)c$. Así $C_T A C_T \subseteq F C_T$ y por lo tanto

$$C_T^2 = C_T \cdot 1 \cdot C_T = n_{\lambda} C_T \quad \text{con} \quad n_{\lambda} \in F.$$

Para calcular n_{λ} vamos a proceder del siguiente modo. Consideramos la aplicación multiplicación a derecha por C_T

$$\begin{aligned} R_{C_T}: A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x C_T \end{aligned}$$

a la que le vamos a calcular su traza. Para ello podemos usar cualquier base de A , como por ejemplo el propio grupo S_n . El coeficiente de $\sigma \in S_n$ en $R_{C_T}(\sigma) = \sigma C_T$ coincide con el coeficiente de Id en $C_T = \sum_{p \in R(T), q \in C(T)} \text{sig}(q) pq$. La única forma de que pq sea Id es que $q = p^{-1}$, lo que implicaría que tanto p como q pertenecen a $R(T) \cap C(T) = \{\text{Id}\}$. Así que el coeficiente de Id en C_T , y por tanto el de σ en $R_{C_T}(\sigma)$, es 1. La traza de R_{C_T} es la suma de estos coeficientes cuando σ varía en S_n , así que

$$\text{traza}(R_{C_T}) = n!$$

Pero hay una segunda forma de calcular esta traza, y es descomponer A como $A = AC_T \oplus B$ para algún subespacio B y considerar una base de A formada por la unión de una base $\{a_1 C_T, \dots, a_d C_T\}$ de AC_T y otra de B . Como $R_{C_T}(a_i C_T) = a_i C_T^2 = n_\lambda a_i C_T$ y $R_{C_T}(B) = BC_T \leq AC_T$ entonces la matriz coordenada de R_{C_T} respecto de esta base tendrá la forma

$$\begin{pmatrix} n_\lambda I_d & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz identidad de orden $d = \dim AC_T$. Visto así

$$\text{traza}(R_{C_T}) = n_\lambda \dim AC_T.$$

Comparando ambas fórmulas obtenemos que $n! = n_\lambda \dim AC_T$. Puesto que sabemos que $n! \neq 0$ en F entonces tampoco así pueden serlo ni n_λ ni $\dim AC_T$. Esto nos permite despejar

$$n_\lambda = \frac{n!}{\dim AC_T} \neq 0$$

Ahora demostraremos la primera afirmación, y así podremos cambiar $\dim AC_T$ en la fórmula de n_λ por $\dim S^\lambda$.

Veamos que AC_T es irreducible. Dado $N \leq AC_T$ un submódulo se tiene que:

$$C_T N \subseteq C_T AC_T = FC_T \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \uparrow \\ \dim FC_T = 1 \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_T N = 0 \\ 0 \\ C_T N = FC_T \end{array} \right.$$

Por un lado, si $C_T N = 0$ entonces $N^2 = NN \subseteq AC_T N = \{0\}$. Por el Teorema de Maschke (su demostración, de hecho) existe un submódulo N' tal que $F[G] = N \oplus N'$. Ahora $N = N1 \subseteq NF[G] \subseteq NN + NN' = 0 + NN' \subseteq N'$ por ser N' submódulo. Como $N \cap N' = \{0\}$ esto implica que $N = \{0\}$. Por otro lado, si $C_T N = FC_T$, como $C_T N \subseteq N$ por ser N submódulo entonces $C_T \in N$ y $AC_T \subseteq N \subseteq AC_T$ implica que $N = AC_T$. Esto nos muestra que AC_T es irreducible.

Veamos que AC_T es isomorfo a S^λ . Definimos primero

$$\begin{aligned}\varphi: M^\lambda &\rightarrow AC_T \\ \sigma\{T\} &\mapsto \sigma C_T\end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida ya que si $\sigma\{T\} = \tau\{T\}$ entonces $\{T\} = \sigma^{-1}\tau\{T\}$ y así $\sigma^{-1}\tau \in R(T)$. Pero en tal caso $\sigma^{-1}\tau C_T = C_T$ y $\tau C_T = \sigma C_T$, por lo que φ sí está bien definida. Claramente también es un homomorfismo de $F[S_n]$ -módulos. La imagen de $e_T = b_T\{T\}$ es

$$\varphi(e_T) = \varphi(b_T\{T\}) = b_T C_T \neq 0$$

ya que $0 \neq n_\lambda C_T = C_T^2 = a_T b_T C_T$. Puesto que $e_T \in S^\lambda \subseteq M^\lambda$, esto nos dice que al restringir φ a S^λ tendremos un homomorfismo no nulo entre S^λ y AC_T . Ahora bien, como ambos son módulos irreducibles el Lema de Schur nos asegura que se trata de un isomorfismo. Por tanto AC_T es isomorfo a S^λ . ■

Veamos una aplicación de esta nueva forma de interpretar las representaciones irreducibles de S_n . Recordar que λ' denota el diagrama opuesto a λ .

Corolario 2.3.1 $S^\lambda \otimes S^{(1,\dots,1)} \cong S^{\lambda'}$

Demostración. Primero observamos que si R_0 es un $(1, \dots, 1)$ -tablero entonces su grupo de filas es $\{\text{Id}\}$ mientras que el de columnas es S_n , por lo que $C_0 := C_{R_0} = a_{R_0} b_{R_0} = \text{Id} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig}(\sigma) \sigma$. Como $\tau C_0 = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig}(\sigma) \tau \sigma = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig}(\tau^{-1} \sigma) \sigma = \text{sig}(\tau^{-1}) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig}(\sigma) \sigma = \text{sig}(\tau) C_0$ entonces $F[S_n] C_0 = F C_0$ tiene dimensión 1 y es de hecho la representación alternada ya que $\tau C_0 = \text{sig}(\tau) C_0$.

Primero observamos que el grupo de columnas de cualquier $(1, \dots, 1)$ -tablero R_0 es todo S_n . Así que si R es otro tablero $(1, \dots, 1)$ -tablero entonces $R = \sigma R_0$ para algún σ y $e_R = e_{\sigma R_0} = \sigma e_{R_0} = \text{sig}(\sigma) e_{R_0}$ ya que $\sigma \in C(R_0) = S_n$. Esto muestra que $S^{(1,\dots,1)} = F e_{R_0}$ es la representación alternada, es decir, $\sigma e_{R_0} = \text{sig}(\sigma) e_{R_0}$.

Dado T un λ -tablero y T' su opuesto observamos que

$$\begin{aligned}b_{T'} a_{T'} \cdot (C_T \otimes C_0) &= b_{T'} \left(\sum_{q \in R(T')=C(T)} (q C_T) \otimes (q C_0) \right) \\ &= \sum_{q \in R(T')=C(T), p \in C(T')=R(T)} \text{sig}(p) (p q C_T) \otimes (p q C_0) \\ &= \sum_{q \in C(T), p \in R(T)} \text{sig}(p) \text{sig}(p q) (p q C_T) \otimes C_0 \\ &= \sum_{q \in C(T), p \in R(T)} \text{sig}(q) (p q C_T) \otimes C_0 \\ &= (a_T b_T C_T) \otimes C_0 = C_T^2 \otimes C_0 = n_\lambda C_T \otimes C_0\end{aligned}$$

es un múltiplo no nulo de $C_T \otimes C_0$.

Definimos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f: F[S_n]C_{T'} &\rightarrow F[S_n]C_T \otimes F[S_n]C_0 \\ x &\mapsto x \cdot C_T \otimes C_0 \end{aligned}$$

Esta aplicación es claramente un homomorfismo de módulos. Como $F[S_n]C_T \otimes F[S_n]C_0$ son combinaciones lineales de elementos $\sigma C_T \otimes C_0$ con $\sigma \in S_n$ y la imagen por f de $\frac{1}{n_\lambda \text{sig}(\sigma)} \sigma C_{T'}$ es

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_\lambda \text{sig}(\sigma)} \sigma b_{T'} a_{T'} C_T \otimes C_0 &= \frac{n_\lambda}{n_\lambda \text{sig}(\sigma)} \cdot \sigma C_T \otimes C_0 = \frac{1}{\text{sig}(\sigma)} (\sigma C_T) \otimes (\sigma C_0) \\ &= (\sigma C_t) \otimes C_0 \end{aligned}$$

entonces f es suprayectiva. El núcleo es un submódulo de $F[S_n]C_{T'}$, que sabemos que es irreducible por lo que o bien es $\{0\}$ (y f será isomorfismo) o bien es todo $F[S_n]C_{T'}$ y f será nula. Esto último no puede ser ya que al ser f suprayectiva tendríamos que $F[S_n]C_T \otimes F[S_n]C_0$ sería nulo, pero $C_T \otimes C_0$ no es nulo. Como, salvo isomorfismo, podemos cambiar $F[S_n]C_{T'}$ por $S^{\lambda'}$, $F[S_n]C_T$ por S^λ y $F[S_n]C_0$ por $S^{(1, \dots, 1)}$ se obtiene el enunciado. ■

2.4. Caracteres del grupo simétrico

En esta sección vamos a ver una estrategia para calcular la tabla de caracteres de los grupos simétricos a partir de los caracteres de los módulos M^λ , que son sencillos de describir combinatoriamente. Esto nos muestra una primera aproximación a este cálculo, aunque una mejor estrategia es la regla de Murnaghan-Nakayama, que por motivos de espacio no discutiremos ya que uno de los objetivos de este trabajo es familiarizarnos con el cálculo mediante caracteres, por lo que dedicamos más espacio a desarrollar ejemplos. Usaremos la notación χ_λ para denotar a χ_{S^λ} .

Lema 2.4.1 *Si S^λ es isomorfo a un sumando en la descomposición de M^μ en suma de módulos irreducibles entonces λ domina a μ .*

Demostración. Sea T un λ -tablero. Sabemos que $b_T S^\lambda \neq 0$ ya que $b_T e_T = b_T b_T \{T\} = b_T^2 \{T\} = |C(T)| b_T \{T\} = |C(T)| e_T \neq 0$ pues $|C(T)|$ divide a $n!$ primo con $\text{car } F$. En particular $b_T M^\mu$, que contiene a $b_T S^\lambda$ no es nulo. Por tanto existe un μ -tablero R tal que $b_T \{R\} \neq 0$. Esto sabemos que implica que T es antidisjunto para R . Por lo tanto, λ domina a μ . ■

Proposición 2.4.1

$$\chi_{M^\lambda} = \chi_\lambda + \sum_{\lambda < \mu, \lambda \neq \mu} [\chi_{M^\lambda}, \chi_\mu] \chi_\mu$$

Demostración. Sabemos que $M^\lambda = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots$ para ciertos módulos irreducibles W_1, W_2, \dots con $W_1 = S^\lambda$ ya que es un submódulo (recordar el Teorema de Maschke).

Dado un λ -tablero T sabemos que $b_T W_1 \oplus b_T W_2 \oplus \cdots = b_T M^\lambda = Fe_T = b_T S^\lambda = b_T W_1$. Así $b_T W_2 = b_T W_3 = \cdots = 0$. En particular, ningún W_i con $i \geq 2$ es isomorfo a S^λ ya que $b_T S^\lambda \neq \{0\}$ pero $b_T W_i = \{0\}$ si $i \geq 2$. Así que S^λ solamente aparece una vez en la descomposición de M^λ . ■

Definición 2.4.1 Dados $\lambda, \mu \vdash n$, un μ -**refinamiento** de λ es una expresión de los λ_i como suma de los μ_j 's usando todos los μ_j .

Ejemplo 2.4.1 Sea $\lambda = (5, 4)$ y $\mu = (3, 2, 2, 1, 1) = (3, 2_1, 2_2, 1_1, 1_2)$. Los μ -refinamientos de λ son

$$\begin{array}{llll} 5 = 3 + 2_1 & 5 = 3 + 2_2 & 5 = 3 + 1_1 + 1_2 & 5 = 2_1 + 2_2 + 1_1 \\ 4 = 1_1 + 1_2 + 2_2 & 4 = 1_1 + 1_2 + 2_1 & 4 = 2_1 + 2_2 & 4 = 3 + 1_2 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{l} 5 = 2_1 + 2_2 + 1_2 \\ 4 = 3 + 1_1 \end{array}$$

Por lo tanto, hay 5 μ -refinamientos de λ .

Proposición 2.4.2 Sea σ una permutación de tipo μ :

$$\chi_{M^\lambda}(\sigma) = \text{número de } \mu\text{-refinamientos de } \lambda.$$



Demostración. Como $\sigma\{T\} = \{\sigma T\}$ entonces $\chi_{M^\lambda}(\sigma)$ es el número de $\sigma\{T\}$ que quedan fijos por σ . Así, fijado σ hemos de encontrar cuántos $\{T\}$ cumplen que $\sigma\{T\} = \{T\}$. Si $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$ con σ_i μ_i -ciclo y C_i son los elementos que aparecen en σ_i entonces $\sigma\{T\} = \{T\}$ si y solamente si para todo i C_i está contenido en alguna fila de T , o lo que es lo mismo si y solamente si $\{T\}$ determina un μ -refinamiento de λ . ■

Definición 2.4.2 Dadas $\lambda, \mu \vdash n$ decimos que $\lambda < \mu$ si $\lambda_i = \mu_i$, $i = 1, \dots, k$ pero $\lambda_k < \mu_k$ para algún k (**orden lexicográfico**). Notar que $\lambda << \mu$ implica que $\lambda \leq \mu$. Puesto que conocemos χ_{M^λ} podemos calcular χ_λ empezando por $\chi_{(n)}$ y descendiendo en el orden lexicográfico.

Tabla de caracteres de S_3

Calcularemos de nuevo la tabla de caracteres de S_3 pero usando la técnica anterior. Lo primero que hacemos es ordenar las particiones de $n = 3$.

- $(3) = \square\square\square$ y el tamaño de la clase de conjugación asociada es $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 2$.

- $(2,1) =$  y el tamaño de la clase de conjugación asociada es $\frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 1 = 3$.
- $(1,1,1) =$  y el tamaño de la clase de conjugación asociada es 1.

Denotamos χ_{M^λ} por ψ_λ y calculamos estos caracteres mediante el uso de refinamientos:

- $\psi_{(3)} = \chi_{M^{(3)}}$, $\lambda = (3)$. Calculamos el número de μ -refinamientos que tenemos para los distintos tipos de permutaciones.

1. $\sigma_1 = (1)(2)(3)$, σ_1 tiene tipo $(1_1, 1_2, 1_3)$.
Tenemos que buscar los $(1_1, 1_2, 1_3)$ -refinamientos de (3) .

$$3 = 1_1 + 1_2 + 1_3$$

Por lo que sólo posee un $(1_1, 1_2, 1_3)$ -refinamiento. Esto nos dice que $\psi_{(3)}(\sigma_1) = 1$.

2. $\sigma_2 = (12)$, σ_2 tiene tipo $(2, 1)$.
Tenemos que buscar los $(2, 1)$ -refinamientos de (3) .

$$3 = 2 + 1$$

Por lo que sólo hay uno y así $\psi_{(3)}(\sigma_2) = 1$.

3. $\sigma_3 = (123)$, σ_3 tiene tipo (3) . Aquí el único (3) -refinamiento es $3 = 3$.

- $\psi_{(2,1)} = \chi_{M^{(2,1)}}$, $\lambda = (2, 1)$. Veamos el número de μ -refinamientos que tenemos para los distintos tipos de permutaciones.

1. $\sigma_1 = (1)(2)(3)$, σ_1 tiene tipo $(1_1, 1_2, 1_3)$. Los $(1_1, 1_2, 1_3)$ -refinamientos de $(2,1)$ son

$$\begin{array}{lll} 2 = 1_1 + 1_2 & 2 = 1_1 + 1_3 & 2 = 1_2 + 1_3 \\ 1 = 1_3 & 1 = 1_2 & 1 = 1_1 \end{array}$$

2. $\sigma_2 = (12)$, σ_2 tiene tipo $(2, 1)$. Los $(2, 1)$ -refinamientos de $(2, 1)$ son

$$\begin{array}{l} 2 = 2 \\ 1 = 1 \end{array}$$

3. $\sigma_3 = (123)$, σ_3 tiene tipo (3) . No hay (3) -refinamientos de $(2, 1)$.

- $\psi_{(1,1,1)} = \chi_{M^{(1,1,1)}}$, $\lambda = (1, 1, 1)$. Calculemos el número de μ -refinamientos que tenemos para los distintos tipos de permutaciones.

1. $\sigma_1 = (1)(2)(3)$, σ_1 tiene tipo $(1_1, 1_2, 1_3)$. Los $(1_1, 1_2, 1_3)$ -refinamientos de $(1, 1, 1)$ son claramente 6

$$1 = 1_i$$

$$1 = 1_j$$

$$1 = 1_k$$

con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

2. $\sigma_2 = (12)$, σ_2 tiene tipo $(2, 1)$. No hay $(2, 1)$ -refinamientos de $(1, 1, 1)$.
3. $\sigma_3 = (123)$, σ_3 tiene tipo (3) . No hay (3) -refinamientos de $(1, 1, 1)$.

Esto nos da la siguiente tabla

	$(1)^3$	$(2, 1)$	(3)
$\psi_{(3)}$	1	1	1
$\psi_{(2, 1)}$	3	1	0
$\psi_{(1, 1, 1)}$	6	0	0

Con estos datos podemos calcular ya la tabla de caracteres de S_3 . Para ello utilizaremos la fórmula $\chi_{M^\lambda} = \chi_\lambda + \sum_{\lambda < \mu, \lambda \neq \mu} [\chi_{M^\lambda}, \chi_\mu] \chi_\mu$ de la Proposición 2.4.1.

Empezamos con $\chi_{(3)} = \chi_{M^{(3)}}$:

$$\chi_{M^{(3)}} = \chi_{(3)} + \sum_{(3) < \mu, (3) \neq \mu} [\chi_{M^{(3)}}, \chi_\mu] \chi_\mu \Rightarrow \chi_{M^{(3)}} = \chi_{(3)}$$

Pasamos al siguiente, $\chi_{(2, 1)}$:

$$\begin{aligned} \chi_{M^{(2, 1)}} &= \chi_{(2, 1)} + \sum_{(2, 1) < \mu, (2, 1) \neq \mu} [\chi_{M^{(2, 1)}}, \chi_\mu] \chi_\mu = \chi_{(2, 1)} + \chi_{(3)} \\ [\chi_{M^{(2, 1)}}, \chi_{(3)}] &= \frac{1}{3!} \{3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 0\} = \frac{6}{3!} = 1 \end{aligned}$$

Así,

$$\chi_{M^{(2, 1)}} = \chi_{(2, 1)} + \chi_{(3)} \Rightarrow \chi_{(2, 1)} = \chi_{M^{(2, 1)}} - \chi_{(3)}$$

Pasamos al siguiente, $\chi_{(1, 1, 1)}$.

$$\begin{aligned} \chi_{M^{(1, 1, 1)}} &= \chi_{(1, 1, 1)} + \sum_{(1, 1, 1) < \mu, (1, 1, 1) \neq \mu} [\chi_{M^{(1, 1, 1)}}, \chi_\mu] \chi_\mu \\ [\chi_{M^{(1, 1, 1)}}, \chi_{(3)}] &= \frac{1}{3!} \{6 \cdot 1 + 0 + 0\} = \frac{6}{3!} = 1 \\ [\chi_{M^{(1, 1, 1)}}, \chi_{(2, 1)}] &= \frac{1}{3!} \{6 \cdot 2 + 0 + 0\} = \frac{12}{3!} = 2 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\chi_{M^{(1,1,1)}} = \chi_{(1,1,1)} + 1 \cdot \chi_{(3)} + 2 \cdot \chi_{(2,1)} \Rightarrow \chi_{(1,1,1)} = \chi_{M^{(1,1,1)}} - \chi_{(3)} - 2 \cdot \chi_{(2,1)}$$

Y por lo tanto, obtenemos la siguiente tabla de caracteres:

	$(1)^3$	$(2,1)$	(3)
$\chi_{(3)}$	1	1	1
$\chi_{(2,1)}$	2	0	-1
$\chi_{(1,1,1)}$	1	-1	1

Tabla de caracteres de S_4

Calcularemos la tabla de caracteres de S_4 . Como antes, lo primero que hacemos es ordenar las particiones de $n = 4$.

- $(4) = \square\square\square\square$ y el tamaño de la clase de conjugación asociada es $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 6$.
- $(3,1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \end{array}$ y el tamaño de la clase de conjugación asociada es $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3} \cdot 1 = 8$.
- $(2,2) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ y el tamaño de la clase de conjugación asociada es $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = \frac{6}{2!} = 3$.
- $(2,1,1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \end{array}$ y el tamaño de la clase de conjugación asociada es $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.
- $(1,1,1,1) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ y el tamaño de la clase de conjugación asociada es 1.

Como antes, usamos la notación $\psi_\lambda := \chi_{M^\lambda}$. Calculamos una tabla para los ψ_λ 's:

	$(1)^4$	$(2,1,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	(4)
$\psi_{(4)}$	1	1	1	1	1
$\psi_{(3,1)}$	4	2	0	1	0
$\psi_{(2,2)}$	6	2	2	0	0
$\psi_{(2,1,1)}$	12	2	0	0	0
$\psi_{(1,1,1,1)}$	24	0	0	0	0

En efecto,

- $\psi_{(4)} = \chi_{M^{(4)}}$, $\lambda = (4)$. Independientemente del tipo μ de la permutación que se elija, (4) solamente tiene un μ -refinamiento.
- $\psi_{(3,1)} = \chi_{M^{(3,1)}}$, $\lambda = (3,1)$. Veamos el número de μ -refinamientos que tenemos para los distintos tipos de permutaciones.

1. $\sigma_1 = (1)(2)(3)(4)$, σ_1 tiene tipo $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$. Los $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$ -refinamientos de $(3, 1)$ son

$$\begin{array}{cccc} 3 = 1_1 + 1_2 + 1_3 & 3 = 1_1 + 1_2 + 1_4 & 3 = 1_1 + 1_3 + 1_4 & 3 = 1_2 + 1_3 + 1_4 \\ 1 = 1_4 & 1 = 1_3 & 1 = 1_2 & 1 = 1_1 \end{array}$$

2. $\sigma_2 = (123)(4)$, σ_2 tiene tipo $(3, 1)$ Los $(3, 1)$ -refinamientos de $(3, 1)$ son

$$\begin{array}{c} 3 = 3 \\ 1 = 1 \end{array}$$

3. $\sigma_3 = (12)(34)$, σ_3 tiene tipo $(2_1, 2_2)$. No hay $(2_1, 2_2)$ -refinamientos de $(3, 1)$.

4. $\sigma_4 = (12)$, σ_4 tiene tipo $(2, 1_1, 1_2)$. Los $(2, 1_1, 1_2)$ -refinamientos de $(3, 1)$ son

$$\begin{array}{cc} 3 = 2 + 1_1 & 3 = 2 + 1_2 \\ 1 = 1_2 & 1 = 1_1 \end{array}$$

5. $\sigma_5 = (1234)$, σ_5 tiene tipo (4) . No hay (4) -refinamientos de $(3, 1)$.

- $\psi_{(2_1, 2_2)} = \chi_{M^{(2_1, 2_2)}}$, $\lambda = (2_1, 2_2)$. Calculemos el número de μ -refinamientos que tenemos para los distintos tipos de permutaciones.

1. $\sigma_1 = (1)(2)(3)(4)$, σ_1 tiene tipo $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$. Los $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$ -refinamientos de $(2_1, 2_2)$ son

$$\begin{array}{c} 2 = 1_i + 1_j \\ 2 = 1_k + 1_l \end{array}$$

con $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, por lo que hay 6 de ellos.

2. $\sigma_2 = (123)(4)$, σ_2 tiene tipo $(3, 1)$. No hay $(3, 1)$ -refinamientos de $(2_1, 2_2)$.

3. $\sigma_3 = (12)(34)$, σ_3 tiene tipo $(2_1, 2_2)$. Los $(2_1, 2_2)$ -refinamientos de $(2_1, 2_2)$ son

$$\begin{array}{cc} 2_1 = 2_1 & 2_1 = 2_2 \\ 2_2 = 2_2 & 2_2 = 2_1 \end{array}$$

4. $\sigma_4 = (12)$, σ_4 tiene tipo $(2, 1_1, 1_2)$. Los $(2, 1_1, 1_2)$ -refinamientos de $(2_1, 2_2)$ son

$$\begin{array}{cc} 2_1 = 2 & 2_1 = 1_1 + 1_2 \\ 2_2 = 1_1 + 1_2 & 2_2 = 2 \end{array}$$

5. $\sigma_5 = (1234)$, σ_5 tiene tipo (4) . No hay (4) -refinamientos de $(2_1, 2_2)$.

- $\psi_{(2,1_1,1_2)} = \chi_{M^{(2,1_1,1_2)}}$, $\lambda = (2, 1_1, 1_2)$. Calculemos los μ -refinamientos que tenemos para los distintos tipos de permutaciones.

1. $\sigma_1 = (1)(2)(3)(4)$, σ_1 tiene tipo $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$. Es sencillo observar que los $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$ -refinamientos de $(2, 1_1, 1_2)$ son

$$2 = 1_i + 1_j$$

$$1_1 = 1_k$$

$$1_2 = 1_l$$

con $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, así que hay un total de 12 $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$ -refinamientos.

2. $\sigma_2 = (123)(4)$, σ_2 tiene tipo $(3, 1)$. No hay $(3, 1)$ -refinamientos de $(2, 1_1, 1_2)$.

3. $\sigma_3 = (12)(34)$, σ_3 tiene tipo $(2_1, 2_2)$. No hay $(2_1, 2_2)$ -refinamientos de $(2, 1_1, 1_2)$.

4. $\sigma_4 = (12)$, σ_4 tiene tipo $(2, 1_1, 1_2)$. Los $(2, 1_1, 1_2)$ -refinamientos de $(2, 1_1, 1_2)$ son

$$2 = 2$$

$$1_1 = 1_1$$

$$1_2 = 1_2$$

$$2 = 2$$

$$1_1 = 1_2$$

$$1_2 = 1_1$$

5. $\sigma_5 = (1234)$, σ_5 tiene tipo (4) . No hay (4) -refinamientos de $(2, 1_1, 1_2)$.

- $\psi_{(1_1,1_2,1_3,1_4)} = \chi_{M^{(1_1,1_2,1_3,1_4)}}$, $\lambda = (1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$. Calculemos el número de μ -refinamientos que tenemos para los distintos tipos de permutaciones.

1. $\sigma_1 = (1)(2)(3)(4)$, σ_1 tiene tipo $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$. Hay claramente son $4! = 24$. $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$ -refinamientos de $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$.

2. $\sigma_2 = (123)(4)$, σ_2 tiene tipo $(3, 1)$. No hay $(3, 1)$ -refinamientos de $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$.

3. $\sigma_3 = (12)(34)$, σ_3 tiene tipo $(2_1, 2_2)$. No hay $(2_1, 2_2)$ -refinamientos de $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$.

4. $\sigma_4 = (12)$, σ_4 tiene tipo $(2, 1_1, 1_2)$. No hay $(2, 1_1, 1_2)$ -refinamientos de $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$.

5. $\sigma_5 = (1234)$, σ_5 tiene tipo (4) . Tampoco hay (4) -refinamientos de $(1_1, 1_2, 1_3, 1_4)$.

A continuación vamos a calcular la tabla de caracteres de S_4 . Empezamos con $\chi_{(4)}$

$$\chi_{M^{(4)}} = \chi_{(4)} + \sum_{(4) < \mu, (4) \neq \mu} [\chi_{M^{(4)}}, \chi_{\mu}] \chi_{\mu} \Rightarrow \chi_{M^{(4)}} = \chi_{(4)}$$

Pasamos al siguiente, $\chi_{(3,1)}$:

$$\chi_{M^{(3,1)}} = \chi_{(3,1)} + \sum_{(3,1) < \mu, (3,1) \neq \mu} [\chi_{M^{(3,1)}}, \chi_{\mu}] \chi_{\mu}$$

$$[\chi_{M^{(3,1)}}, \chi_{(4)}] = \frac{1}{4!} \{4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 6 + 0 + 1 \cdot 1 \cdot 8 + 0\} = \frac{4 + 12 + 8}{4!} = \frac{24}{4!} = 1$$

Entonces,

$$\chi_{M^{(3,1)}} = \chi_{(3,1)} + \chi_{(4)} \Rightarrow \chi_{(3,1)} = \chi_{M^{(3,1)}} - \chi_{(4)}$$

Pasamos a $\chi_{(2,2)}$:

$$\chi_{M^{(2,2)}} = \chi_{(2,2)} + \sum_{(2,2) < \mu, (2,2) \neq \mu} [\chi_{M^{(2,2)}}, \chi_{\mu}] \chi_{\mu}$$

$$[\chi_{M^{(2,2)}}, \chi_{(4)}] = \frac{1}{4!} \{6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 + 0\} = \frac{6 + 12 + 6}{4!} = 1$$

$$[\chi_{M^{(2,2)}}, \chi_{(3,1)}] = \frac{1}{4!} \{6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 + 0 + 0\} = \frac{18 + 12 - 6}{4!} = 1$$

Entonces,

$$\chi_{M^{(2,2)}} = \chi_{(2,2)} + 1 \cdot \chi_{(4)} + 1 \cdot \chi_{(3,1)} \Rightarrow \chi_{(2,2)} = \chi_{M^{(2,2)}} - \chi_{(4)} - \chi_{(3,1)}$$

Pasamos a $\chi_{(2,1,1)}$:

$$\chi_{M^{(2,1,1)}} = \chi_{(2,1,1)} + \sum_{(2,1,1) < \mu, (2,1,1) \neq \mu} [\chi_{M^{(2,1,1)}}, \chi_{\mu}] \chi_{\mu}$$

$$[\chi_{M^{(2,1,1)}}, \chi_{(4)}] = \frac{1}{4!} \{12 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 6 + 0 + 0 + 0\} = \frac{12 + 12}{4!} = 1$$

$$[\chi_{M^{(2,1,1)}}, \chi_{(3,1)}] = \frac{1}{4!} \{12 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 6\} = \frac{36 + 12}{4!} = 2$$

$$[\chi_{M^{(2,1,1)}}, \chi_{(2,2)}] = \frac{1}{4!} \{12 \cdot 2\} = \frac{24}{4!} = 1$$

Entonces,

$$\chi_{M^{(2,1,1)}} = \chi_{(2,1,1)} + 1 \cdot \chi_{(4)} + 2 \cdot \chi_{(3,1)} + 1 \cdot \chi_{(2,2)}$$

$$\chi_{(2,1,1)} = \chi_{M^{(2,1,1)}} - \chi_{(4)} - 2 \cdot \chi_{(3,1)} - \chi_{(2,2)}$$

Pasamos a $\chi_{(1,1,1,1)}$:

$$\begin{aligned}\chi_{M^{(1,1,1,1)}} &= \chi_{(1,1,1,1)} + \sum_{(1,1,1,1) < \mu, (1,1,1,1) \neq \mu} [\chi_{M^{(1,1,1,1)}}, \chi_{\mu}] \chi_{\mu} \\ [\chi_{M^{(1,1,1,1)}}, \chi_{(4)}] &= \frac{1}{4!} \{24 \cdot 1\} = \frac{24}{4!} = 1 \\ [\chi_{M^{(1,1,1,1)}}, \chi_{(3,1)}] &= \frac{1}{4!} \{24 \cdot 3\} = 3 \\ [\chi_{M^{(1,1,1,1)}}, \chi_{(2,2)}] &= \frac{1}{4!} \{24 \cdot 2\} = 2 \\ [\chi_{M^{(1,1,1,1)}}, \chi_{(2,1,1)}] &= \frac{1}{4!} \{24 \cdot 3\} = 3\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\chi_{M^{(1,1,1,1)}} &= \chi_{(1,1,1,1)} + 1 \cdot \chi_{(4)} + 3 \cdot \chi_{(3,1)} + 2 \cdot \chi_{(2,2)} + 3 \cdot \chi_{(2,1,1)} \\ \chi_{(1,1,1,1)} &= \chi_{M^{(1,1,1,1)}} - \chi_{(4)} - 3 \cdot \chi_{(3,1)} - 2 \cdot \chi_{(2,2)} - 3 \cdot \chi_{(2,1,1)}\end{aligned}$$

Y por lo tanto, obtenemos la siguiente tabla de caracteres:

	$(1)^4$	$(2, 1, 1)$	$(2, 2)$	$(3, 1)$	(4)
$\chi_{(4)}$	1	1	1	1	1
$\chi_{(3,1)}$	3	1	-1	0	-1
$\chi_{(2,2)}$	2	0	2	-1	0
$\chi_{(2,1,1)}$	3	-1	-1	0	1
$\chi_{(1,1,1,1)}$	1	-1	1	1	-1

Conclusiones

A lo largo de este Trabajo Fin de Grado he realizado un estudio de lo que son las representaciones lineales de grupos finitos, viendo más en profundidad la del grupo simétrico. Lo más destacable bajo mi punto de vista, ha sido ver lo complicado que puede ser encontrar exactamente los submódulos irreducibles que forman la descomposición de un módulo y lo sencillo que resulta utilizando caracteres. La forma en la que hemos visto las representaciones irreducibles del grupo simétrico a partir de lo que es la definición de diagrama de Young me ha parecido una forma diferente y entretenida. Ésto me ha ayudado a ver que por muy difícil que pueda parecer demostrar algo, es posible que exista un camino distinto, más sencillo, a partir del cual poder demostrarlo.

Por otro lado, me gustaría decir que he disfrutado mucho realizando este trabajo y que he aprendido mucho de mi tutor en las distintas reuniones que hemos tenido.

Bibliografía

- [1] C. W. Curtis: *Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer*. History of Mathematics, vol. 15. American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1999.
- [2] T. Hawkins: *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory*. Archive for History of Exact Sciences, vol. 8 (4), 1972, pp. 243–287.
- [3] I. Kleiner: *The Evolution of Group Theory: A Brief Survey*. Mathematics Magazine, vol 79 (4), 1986, pp. 195-215.
- [4] B. E. Sagan: *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Graduate Texts in Mathematics vol. 203, Springer, 2001.
- [5] J-P. Serre: *Linear Representations of Finite Groups*. Graduate Texts in Mathematics vol. 42, Springer-Verlag New York, Inc., 1977.